《数学分析》I-2017-2018-1 期中考试试题参考答案

一题，填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$的定义为：$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x', 0 < |x' - x_0| < \delta$，有$|f(x') - A| \geq \varepsilon_0$
2. 设$f(x)$在 0 点可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2} = \frac{1}{2}f'(0)$
3. 函数$y = sgn(\sin x)$ 的间断点为：$k\pi, k \in Z$
4. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$, 则$a = \ln 3$
5. 若函数$f(x) = \begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, x \neq 0\\ a,\ x = 0\end{cases}$在$x = 0$处连续，则$a = 1$

二题，选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. （D）

   设$f(x)$在$x = a$处连续，$\psi(x)$在$x = a$处间断，又$f(a) \neq 0$，则( )

   (A) $\psi[f(x)]$在$x = a$处间断.　　(B) $f[\psi(x)]$在$x = a$处间断.

   (C) $\psi^2(x)$在$x = a$处间断.　　(D) $\dfrac{\psi(x)}{f(x)}$在$x = a$处间断.

2. (D)

   当$n \to +\infty$时，$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - e$ 是$\dfrac{1}{n}$的(　)

   (A) 高阶无穷小.　　(B) 低阶无穷小.

   (C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但非等价无穷小.

3. (D)

   若$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$，则下列正确的是(　)

   (A) 若x_n发散，则y_n必收敛.　　(B) 若x_n无界，则y_n必有界.

   (C) 若x_n有界，则y_n必为无穷小.　　(D) 若x_n无穷大，则y_n必为无穷小.

4. (A)

   设函数$y = f(x)$可微，且曲线$f'(x) \neq 0$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y - dy}{dy}$=(　)

   (A)0.　　(B)1.　　(C)-1.　　(D)不存在.

5. (C)

设$f'(a)>0$，则$\exists\delta>0$有(　)

(A) $f(x)\geq f(a),\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$.

(B) $f(x)\leq f(a),\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$.

(C) $f(x)>f(a),\forall x\in(a,a+\delta);f(x)<f(a),\forall x\in(a-\delta,a)$.

(D) $f(x)<f(a),\forall x\in(a,a+\delta);f(x)>f(a),\forall x\in(a-\delta,a)$.

三题、计算题（每题 5 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{因为}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}\right)=\frac{1}{3}\ln abc$$

所以有：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{abc}$

2. 设$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2},x_1=\sqrt{2}$, 证明该数列收敛，并求其极限。
首先证明有界性，因为$x_1=\sqrt{2}<2$, 假设$x_n<2$，则有$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}<2$。由归纳法知该数列有界。下证该数列单调递增：

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n+2}-\sqrt{x_{n-1}+2}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{x_n+2}+\sqrt{x_{n-1}+2}}$$

所以该数列单调，因为$x_1<x_2$, 所以该数列单调递增。由单调有界定理，该数列收敛。假设极限为A，则有：

$$\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{A}+2}\to\mathrm{A}=2$$

3. 设$y=f(x+y)$, 其中f具有二阶导数，且$f'\neq 1$, 求$\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y'=f'(x+y)(1+y')$$
$$y''=f''(x+y)(1+y')^2+f'(x+y)y''$$

所以有：

$$y''=\frac{f''(x+y)\left(1+y'\right)^2}{1-f'(x+y)}$$

其中：

$$y'=f'(x+y)/(1-f'(x+y))$$

4. 设$y=\sin^2 x$, 求$y^{(n)}$
解：

$$y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$y^{(0)}=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$n \geq 1$, 有

$$y^{(n)} = \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^{(n)} = \frac{-1}{2} 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

5. 设$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2t}\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{2t^2}\frac{1+t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{-4t^3}$$

6. 利用微分计算$\sin 30^0 30' (30' = \frac{\pi}{360} \approx 0.0087)$

$$\sin 30^0 30' \left(30' = \frac{\pi}{360} \approx 0.0087\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{360}$$
$$\approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{360}$$

四．证明题（本题 10 分）

设函数$f(x)$:

1. 在$[x_0, x_n]$有定义且有连续的$n-1$阶导函数$f^{(n-1)}(x)$;
2. 在区间(x_0, x_n)内具有n阶导数;
3. $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$.

证明：在(x_0, x_n)内至少有一$\xi \in (x_0, x_n)$,使得$f^{(n)}(\xi) = 0$.

证明：

证明：$\because f(x_i) = f(x_{i+1}), i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

由Roller定理，$\exists \xi_i^{(1)} \in (x_i, x_{i+1})$，使得

$$f'(\xi_i^{(1)}) = 0, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

再次在$\xi_0^{(1)} < \xi_1^{(1)} < \cdots < \xi_{n-1}^{(1)}$对$f'(x)$利用Roller定理，有$\exists \xi_i^{(2)} \in (\xi_i^{(1)}, \xi_{i+1}^{(1)})$使得

$$f''(\xi_i^{(2)}) = 0, i = 0, \cdots, n-2$$

以此类推，$\exists \xi_0^{(n)} \in (\xi_0^{(n-1)}, \xi_1^{(n-1)})$使得

$$f^{(n)}(\xi_0^{(n)}) = 0$$

五．论述题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 指出函数$\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$的间断点，并指出其类型。

   函数$\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$的间断点为：

$$\frac{1}{n}, n \in Z\backslash 0 \text{ 和 } 0$$

当$x=\frac{1}{n}$, 该间断点为跳跃性间断点。分析如下：

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^+}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=n-(n-1)=1$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^-}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=n-(n)=0$$

当$x=0$，该间断点类型为：

当

$$x_n=\frac{1}{n},\quad \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}-\left[\frac{1}{x_n}\right]\right)=0$$

当

$$x_n=\frac{1}{n+1/2},\quad \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}-\left[\frac{1}{x_n}\right]\right)=1/2$$

所以，极限不存在，故函数在 0 点的类型为第二类间断点。

2. 求函数$y=\sqrt{1-\cos x}$在不可导点的左右导数。

解：函数的不可导点为$2k\pi, k\in Z$

$$f_+'(2k\pi)=\lim_{x\to 2k\pi^+}\frac{f(x)-f(2k\pi)}{x-2k\pi}=\lim_{x\to 2k\pi^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x-2k\pi}$$

令$t=x-2k\pi, t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos(t+2k\pi)}}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos(t)}}{t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}t}{t}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos(t+2k\pi)}}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos(t)}}{t}\lim_{t\to 0^+}\frac{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}{t}=-\sqrt{\frac{1}{2}}$$

六、证明题（本题 10 分）

证明$y=\sin\frac{1}{x}$在$(0，1)$上不一致连续，但在$(a，1)(a>0)$上一致连续。

证明：函数明$y=f(x)$在$(0，1)$一致连续的充分必要条件为：

$$\lim_{x\to 0}f(x),\quad \lim_{x\to 1}f(x)\text{极限存在}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\quad \text{不存在，所以函数在}(0，1)\text{上不一致连续。}$$

由于，

$$\lim_{x\to a}\sin\frac{1}{x}=\sin\frac{1}{a},\text{且}\lim_{x\to 1}\sin\frac{1}{x}=\sin\frac{1}{1}\text{存在}$$

所以函数在$(0，1)$上一致连续。

七．计算题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=2$，求$a,b$之值。

解：因为原式极限为2，$\therefore a=9$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty}\left(3x-x\sqrt{9+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(3x-3x\sqrt{1+\frac{b}{9x}+\frac{1}{9x^2}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(3x-3x\Big(1+\frac{1}{2}(\frac{b}{9x}+\frac{1}{9x^2})+o(\frac{1}{x})\Big)\right)\\
&= -\frac{b}{6}=2
\end{aligned}$$

$\therefore b=-12$

2. 已知$y=a^x+x^a+x^x, a>0$，求dy

解：

$$\begin{aligned}
dy &= da^x+dx^a+dx^x,\\
&= \big(a^x\ln a+ax^{a-1}+x^x(x\ln x+1)\big)\,dx
\end{aligned}$$

所以：

$$\frac{dy}{dx}=a^x\ln a+ax^{a-1}+x^x(xln\,x+1)$$