中国石油大学(北京)

《数学分析》2017-2018-1期末考试题参考答案

Gunning Wu

I 填空题(每题3分,共15分)

(1) 函数$y=\sin(\cos x^2)$ 的导函数为：$-\cos(\cos x^2)\sin x^2 2x$

(2) 函数$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & x\neq 0; \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处可导，则α的取值范围为:$\alpha>1$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$

(4) 数列$\sqrt[n]{n}, n=1,2,\cdots,n,\cdots$ 的最大项为：$3^{\frac{1}{3}}$

(5) 函数$\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的渐近线为：$x-\dfrac{1}{3}$

(6) $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$

(7) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

(8) 函数$y=e^x$在$x_0=0$点的带有拉格朗日余项的n阶泰勒展开式为：$e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1.$

(9) 设$y=x\sinh x$,则$(x\sinh x)^{(100)}=x\sinh x+100\cosh x.$

(10) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$的积分表达式为：$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

II 计算题（本题8分）

极限

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right] &= x\left[1+\frac{1}{5}\frac{1}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\left[1-\frac{1}{5}\frac{1}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\
&= \frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

III 计算题（本题8分）

计算不定积分

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln|x+2|+C
\end{aligned}
$$

IV (本题6分)

证明不等式:

$$
\frac{b-a}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{b-a}{b}(0<b<a)
$$

证明:

$$
\frac{\ln\frac{a}{b}}{b-a}=\frac{1}{\xi},\xi\in(b,a)
$$

所以有:

$$
\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b},\xi\in(b,a)
$$

V 作图题（本题10分）

作出函数

$$
y=\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}
$$

的图形。

先求函数的一阶导数:

$$
f'(x)=\frac{(2x-2)(x+1)-(x+1)^2}{3(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2}
$$

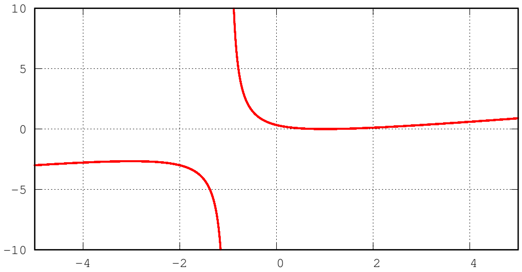

Figure 1: Function of the above.

再求函数的二阶导数：

$$f''(x) = \frac{8}{3(x+1)^3}$$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	无定义	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	convex upward,increasing	local maximum	convex upward, decreasing	no definition	convex downward,decreasing	local minimum	convex upward, increasing

求函数的渐近线： 由题意知：$x=-1$ 为一条竖直渐近线；另一条渐近线为： $y = \frac{x}{3} - 1$.

VI 计算题（本题8分

将多项式$P(x) = 1+3x+5x^2-2x^3$ 表示为$(x+1)$ 的正整数次幂的多项式。
解：因为

$$\begin{aligned} P(-1) &= 5 \\ P'(-1) &= -13 \\ P''(-1) &= 22 \\ P'''(-1) &= -12 \end{aligned}$$

由泰勒公式知：

$$\begin{aligned} P(x) &= 5 + (-13)(x+1) + \frac{22}{2}(x+1)^2 + \frac{-12}{6}(x+1)^3 \\ &= 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^2 \end{aligned}$$

VII 证明题（本题10分）

证明：若函数$f(x)$满足：（1） 在区间$[a,b]$ 上可导；（2）$f(x)$为非线性函数。则在区间 (a,b) 内至少存在一点$\xi \in (a,b)$满足：

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

证明：构造辅助函数：

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

根据题意：

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0, \text{ for some points}$$

因为：

$$F(a) = F(b) = 0,$$

假设：

$$\exists \xi \in (a,b), F(\xi) \neq 0$$

不妨假设：

$$F(\xi) > 0$$

在区间$[a,\xi]$ 和$[\xi,b]$上分别使用洛尔中值定理，有：

$$\exists \xi_1 \in (a,\xi), F'(\xi_1) = \frac{F(\xi)-F(a)}{\xi-a} > 0$$

即，

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{1}$$

$$\exists \xi_2 \in (\xi,b), F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(\xi)}{b-\xi} < 0$$

即，

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{2}$$

对于公式 1和公式 2，总有一个使得：

$$\exists \eta \in (a,b), |f'(\eta)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

VIII　解答题（本题10分

试确定a,b的值，使得：

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

为当$x\to 0$的5阶无穷小量。 解：

$$x-(a+b\cos x)\sin x = x - a\sin x - \frac{1}{2}b\sin 2x \tag{3}$$

利用函数的泰勒展开式：

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\circ(x^5)$$
$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\circ x^6$$

$$\begin{aligned} & x-(a+b\cos x)\sin x = x-a\sin x-\frac{1}{2}b\sin 2x \\ & = x-ax+a\frac{1}{6}x^3-a\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{2}b\left[2x-\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{120}(2x)^5\right]+\circ(x^5) \end{aligned} \tag{4}$$

因为展开时为一个5阶无穷小量，所以有：

$$a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$$

IX　解答题（本题10分）

推出积分$\int \sin^n x \,\mathrm{d}x$ 的递推公式，并利用该公式计算$\int \sin^6 x \,\mathrm{d}x$ 解：

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \,\mathrm{d}x &= -\int \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}\cos x \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)(1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以有：

$$n\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$
$$\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$

所以，

$$
\begin{aligned}
\int \sin^6 x \ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x \ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x + \frac{5}{6}\left[-\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x \ \mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x + \frac{5}{6}\left[-\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}x\right)\right] + C
\end{aligned}
$$