A 卷参考答案

中国石油大学（北京）2018—2019 学年第二学期

《数学分析 II》期末考试试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 求极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$

2. 设向量场$\mathrm{A}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$，则该向量场的旋度的散度$\nabla\cdot(\nabla\times\mathrm{A})$为：$0$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \underline{0}$

4. 设函数$u = xyz$，它在点A(5,1,2)处沿到点B(9,4,14)的方向$\overrightarrow{AB}$上的方向导数为：$\underline{\frac{98}{13}}$

5. 设L是半圆周$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$，则第一类曲线积分$\int_L (x+y)^2\, ds = 2\pi a^3$

二、选择题（**每题 3 分，共 15 分**）

1. 函数$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$在(0,0)点处（ ）

   (A)不连续； (B)偏导数存在； (C)可微； (D)沿着任意方向的方向导数存在.

2. 已知函数$f(x,y)$在(0,0)的某邻域内有定义，且$f_x(0,0) = 2, f_y(0,0) = 1$, 则（ ）

   (A)曲面$z = f(x,y)$在$(0,0,f(0,0))$处的法向量为(2,1,1)；

   (B)曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为(1,0,2)；

   (C)曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为(2,0,1)；

   (D)$dz|_{0,0} = 2dx + dy$.

3. 设有空间区域$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$, 及$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. 则（ ）

   (A)$\iiint_{\Omega_1} xdv = 4\iiint_{\Omega_2} xdv$； (B)$\iiint_{\Omega_1} ydv = 4\iiint_{\Omega_2} ydv$；

   (C)$\iiint_{\Omega_1} zdv = 4\iiint_{\Omega_2} zdv$； (D)$\iiint_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint_{\Omega_2} xyzdv$.

4. 在力场$\vec{F} = \left(\frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$的作用下，一质点沿着圆周$x^2+y^2 = 1$逆时针运动一周所作的功为（ ）

   （A）$\frac{\pi}{2}$, （B）$-\frac{\pi}{2}$, （C）$\frac{3\pi}{2}$, （D）$-\frac{3\pi}{2}$

5. 极限$\lim\limits_{t\to0^+} \frac{1}{t^4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$=( )

   （A）0, （B）$\frac{\pi}{2}$, （C）π, (D)$+\infty$

三、解答题（**每题 6 分，共 30 分**）

1. 求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx\ (n \in Z^+)$

   解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\, d\cos x = [-\sin^{n-1} x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\, dx \quad ---3$$

   $= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-\sin^2 x]\sin^{n-2} x\, dx$,所以得到：

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \cdots = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2m \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases} ---3$$

2. 设$xu - yv = 0, yu + xv = 1$，求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

解：将方程的两边关于 x 求导得到：

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases} ------(4)\text{分}$$

解方程得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2} ---(1)\text{分}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2} ---(1)\text{分}$$

3. 计算积分$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$其中$D$是由$x = 0, y = 0, x + y = 1$所围成的区域。

解：$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$采用坐标变换$\begin{cases} x + y = v \\ x - y = u \end{cases}$，则原式积分为：

$$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du ---3$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du = \frac{1}{2}\int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \frac{1}{4}(e - e^{-1}) ---3$$

4. 计算积分$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$，其中V为椭球体$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

解：$\iiint_V \frac{z^2}{c^2} dxdydz = 2\int_0^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{D_z} dxdy ---2$

$$= 2\int_0^c \frac{z^2}{c^2}\pi ab\left[1 - \frac{z^2}{c^2}\right] dz = 2\pi ab\left[\frac{c}{3} - \frac{c}{5}\right] = \frac{4}{15}\pi abc ---2$$

同理可得：$\iiint_V \frac{y^2}{b^2} dxdydz = \frac{4}{15}\pi abc = \iiint_V \frac{x^2}{a^2} dxdydz$

所以有：$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz = \frac{4}{5}\pi abc ---2$

5. 设$w = f(x^2 + y^2 + z^2, xyz)$，$f$具有连续的二阶偏导数，计算$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.

解：

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_1' 2x + f_2' yz ---(2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(f_1' 2x + f_2' yz) ---(2)$$

$$= 2x(f'_{11}2z + f'_{12}xy) + yf'_2 + yz(f''_{21}2z + f_{22}''xy)$$

$$= 4xzf''_{11} + 2y(x^2+z^2)f''_{12} + xy^2zf''_{22} + yf'_2 --- (2)$$

四、计算题（本题 10 分）计算积分$\int_L (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$，其中$L$为由$(a,0)$到$(0,0)$经过圆$x^2+y^2=ax$上半部分的路线。

解：补充 x 轴上的直线，从(0,0)到$(a,0)$，这样有：

$$\int_{L+l-l} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy --- 4$$

$$= \int_{L+l} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy - \int_{l} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$$

$$= \iint_D mdxdy - \int_l (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy --- 3$$

$$= \frac{1}{2}m\pi\frac{a^2}{4} - \int_0^a 0dy = m\pi\frac{a^2}{8} --- 3$$

五、计算题（本题 10 分）计算积分$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中S 为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的外侧。

解：补充 xoy 面上的平面S_1：$x^2+y^2\le a^2$，方向取下侧。

$$\iint_{S+S_1-S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy --- 4$$

$$= \iint_{S+S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy - \iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= \iiint_V 3dxdydz - \iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy --- 3$$

$$= 4\pi a^3 - 0 = 4\pi a^3 --- 3$$

六、计算题（本题 10 分）计算$\oint_L (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$，其中L为$x+y+z=1$与三个坐标平面的交线，从z轴正向看，方向为逆时针方向。

解：由斯托克斯公式：

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} dS --- 4$$

$$= \iint_S \frac{\sqrt{3}}{3}[2y-2z+2z-2x+2x-2y]\,dS --- 4$$

$$= 0 --- 2$$

七、计算题（本题 10 分）求函数$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在约束条件$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$下的最小值.

解：构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z-1)-\mu(x+2y+3z-6) --- (4)$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_x = 2x-\lambda-\mu=0 \\ L_y = 2y-\lambda-2\mu=0 \\ L_z = 2z-\lambda-3\mu=0 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+3z=6 \end{cases} --- (3)$$

解得到极值点为$x=-\frac{5}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{7}{3}$, 极小值为$F\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)=\frac{25}{3}$---（3）