函数列与函数项级数

武国宁

1 一致收敛

1.1 函数列及其一致收敛性

很早人们就曾经把某些微分方程解形式的表示成一个函数项级数，例如在应用 上很常见的贝塞尔方程的解

$$x^p - \frac{x^{2+p}}{2(2p+2)} + \frac{x^{4+p}}{2\cdot 4(2p+2)(2p-4)} - \cdots \tag{1}$$

是这样的。它的通项为：

$$u_n(x) = \frac{x^{2(n-1)+p}}{2\cdot 4\cdots 2(n-1)(2p+2)(2p+4)\cdots[2p+2(n-1)]}$$

显然对于任意的实数x有，

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{x^2}{2n(2p+2n)} \to 0(n\to\infty)$$

假设该级数的和函数为$S(x)$，现在我们来分析一下$S(x)$的连续性问题。

$$\begin{aligned} &|S(x)-S(x_0)| \\ =&|S(x)-S_n(x)+S_n(x)-S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0)| \\ \le&|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)| \end{aligned} \tag{2}$$

要想$S(x)$在x_0点连续，我们自然对函数级数的收敛性加上这个条件： 对于任意$\epsilon>0$，总可以找到一个自然数N，当$n>N$时，有

$$S_n(x)-S(x)<\epsilon$$

对于所有的$x\in[a,b]$成立。

设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \tag{3}$$

是一列定义在同一数集E上的函数，称为定义在E上的函数列，记为：

$$\{f_n\}$$

设$x_0 \in E$，得到数列：

$$\{f(x_0)\} \tag{4}$$

收敛，则称数列(3)在x_0点收敛，x_0称为数列(3)的收敛点。 若数列(4)发散，则称函数列(3)在x_0点发散。若数列(3) 在$D \subset E$上的每一点都收敛，则称(3)在数集D上收敛。这是对于 $\forall x \in D$，都有数列$\{f_n(x)\}$ 的一个极限值与之对应，由这个对应法则所确定 的D上的函数，成为函数列(3)的极限函数。若把此极限函数记作$f(x)$， 则有：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in D$$

注 1. 函数极限的$\epsilon - N$ 定义是：对于每一个$x \in D$，$\forall x \in D, \exists N > 0, \forall n > N, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

注 2. 使得函数$\{f_n(x)\}$收敛的全体收敛点的集合，成为函数列$\{f_n(x)\}$的收敛域。

例子 1. 讨论函数列$\{f_n(x) = x^n\}$的收敛域与极限函数。

例子 2. 讨论函数列$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$的收敛域与极限函数。

定义 1. 设函数列$f_n(x)$与函数$f(x)$定义在同一数集D上，若对于任给的正数 $\epsilon > 0$，总存在某一个正整数$N > 0$， 使得当$n > N$ 时， 对于一切 $x \in D$ ，都有：

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在D上一**致收敛**于$f(x)$，记作：

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in D$$

注 3.

1. 处处收敛与一致收敛的区别。整体可能步调不一致。
2. 一致收敛的几何意义。

定理 1. 函数列一致收敛的柯西准则 函数列$f_n(x)$在数集D上一致收敛的充分必要条件为： 对于任给的$\epsilon > 0$ ，总存在正整数$N > 0$， 使得当$n, m > N$时，对于一切$x \in D$ 都有：

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon. \tag{5}$$

定理 2. 函数列$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于f的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{6}$$

推论 1. 函数列$\{f_n(x)\}$在D上不一致收敛于$f(x)$的充分且必要条件为：存在$\{x_n\}\subset D$，使得$\{f_n(x_n)-f(x_n)\}$不收敛于0.

例子 3. 讨论函数列$\left\{f_n(x)=nxe^{-nx^2}\right\},x\in(0,+\infty)$的一致敛散性。

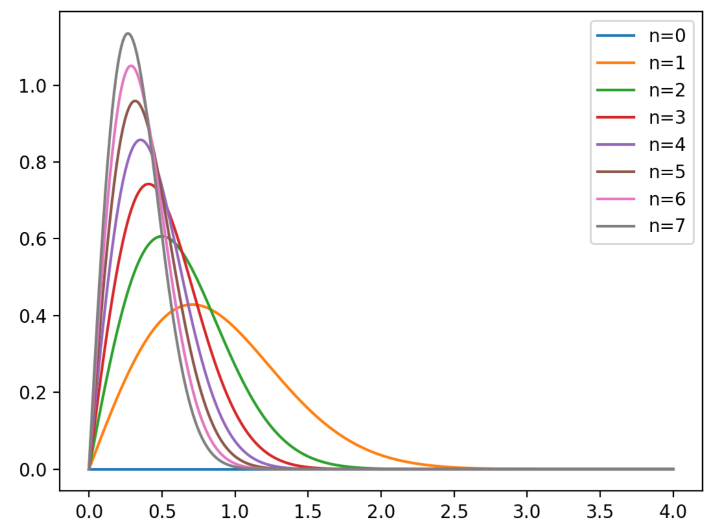

Figure 1: The functions.

定义 2. 设函数列$\{f_n(x)\}$与$f(x)$定义在区间I上，多对于任意闭区间$[a,b]\subset I$，$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，则称$\{f_n(x)\}$在I上内闭一致收敛于f.

1.2 函数项级数及其一致收敛性

设$\{u_n(x)\}$是定义在数集E上的一个函数列，表达式：

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,x\in E \tag{7}$$

称为定义在E上的函数项级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，称

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),x\in E,n=1,2,\cdots, \tag{8}$$

为函数项级数(7)的部分和数列。 若$x_0 \in E$，数项级数：

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \tag{9}$$

收敛，则称x_0为函数项级数(7)的收敛点。所有的收敛点形成收敛域。 在收敛域上，级数(7)对应和函数，并写作：

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = S(x), x \in D$$

例子 4. 讨论几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$的收敛域。

定义 3. 设$\{S_n(x)\}$是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的部分和函数列。 若$\{S_n(x)\}$在数集$D$上一致收敛于$S(x)$， 则称级数$\sum u_n(x)$在$D$上一致收敛于 $S(x)$，若$\sum u_n(x)$在任意闭区间$[a,b] \subset I$上一致收敛，则称 $\sum u_n(x)$在I上内闭一致收敛。

定理 3. 函数项级数$\sum u_n(x)$在数集D上一致收敛的充分必要条件为： 对于任意给定的正数 ϵ，总存在某个正整数N， 使得当$n > N$时，对于一切 $x \in D$ 和一切正整数q，都有：

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

推论 2. 函数项级数$\sum u_n(x)$ 在数集D上一致收敛的必要条件为 函数列$\{u_n(x)\}$在D上一致收敛于零。

设函数项级数$\sum u_n(x)$在D上的和函数为$S(x)$， 则称

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

为函数项级数$\sum u_n(x)$的**余项**。

定理 4. 函数项级数$\sum u_n(x)$在数集D上一致收敛于$S(x)$的充分必要 条件为：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S(x) - S_n(x)| = 0$$

例子 5. 讨论函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$的一致收敛性。

1.3 函数项级数一致收敛性的判别方法

定理 5. (威尔斯特拉斯判别法) 设函数项级数$\sum u_n(x)$定义在数集D上，$\sum M_n$为收敛的正项级数，若对于一切$x \in D$，有：

$$|u_n(x)| \leq M_n, n = 1, 2, \cdots, \tag{10}$$

则函数项级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛。

例子 6. 讨论函数项级数

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}, \sum \frac{\cos nx}{n^2}$$

在$(-\infty, +\infty)$的一致收敛性。

注 4. 上述级数$\sum M_n$称为函数项级数$\sum u_n(x)$的优级数。 上述判别方法成为$\boldsymbol{M}$判别法或优级数判别法。

下面讨论形如

$$\sum u_n(x) v_n(x) \tag{11}$$

定理 6. (阿贝尔判别法)设

(1) $\sum u_n(x)$ 在区间I上一致收敛；

(2) 对于每一个$x \in I, \{v_n(x)\}$是单调的；

(3) $\{v_n(x)\}$在I上一致有界，即存在正数M， 对于一切$x \in I$ 和正整数n，有

$$|v_n(x)| \leq M,$$

则级数(11)一致收敛。

定理 7. (狄利克雷判别法)设

(1) $\sum u_n(x)$的部分和函数列

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)(n = 1, 2, \cdots,)$$

在I上一致有界；

(2) 对于每一个$x \in I, \{v_n(x)\}$是单调的；

(3) 在I上$v_n(x) \rightrightarrows 0(n \to \infty)$ 则级数(11)一致收敛。

例子 7. 讨论函数项级数

$$\sum \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}}$$

在$[0,1]$上的一致敛散性。

例子 8. 若数列$\{a_n\}$单调且收敛于零，则级数

$$\sum a_n \cos nx$$

在$[\alpha, 2\pi - \alpha](0 < \alpha < \pi)$上的一致敛散性。

1.4 作业

1.4.1 讨论下列函数列在所示区间上是否一致收敛或内闭一致收敛，说明理由

(1) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}, n=1,2,\cdots, D\in(-\infty,+\infty)$

(2) $f_n(x)=\begin{cases} -(n+1)x+1, & 0\le x\le \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1}<x<1. \end{cases} \quad n=1,2,\cdots$

(3) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}, n=1,2,\cdots, D\in(-\infty,+\infty)$

1.4.2 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性

(1) $\sum \dfrac{x^n}{n+1}, x\in[-r,r]$

(2) $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $\sum \dfrac{x^n}{n^2}, x\in[0,1]$

(4) $\sum \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x\in(-\infty,+\infty)$

1.4.3 证明题

证明：$f_n(x)$在区间I上内闭一致收敛于f的充分且必要条件是： 对于任意$x_0\in I$，存在x_0的一个邻域$U(x_0)$，使得 $\{f_n(x)\}$在$U(x_0)\cap I$上一致收敛于f.

2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

定理 8. 设函数列f_n在$(a,x_0)\cup(x_0,b)$上一致收敛于$f(x)$，且对每一个n, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$， 则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和$\lim_{x\to x_0} f(x)$均存在且相等。

注 5. 上述定理说明：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{12}$$

注 6. 类似的，若函数$f_n(x)$在(a,b)上一致收敛且 $\lim\limits_{x\to a^+} f_n(x)$存在，可得到：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a^+} f_n(x) = \lim_{x\to a^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

注 7. 类似的，若函数$f_n(x)$在(a,b)上一致收敛且 $\lim\limits_{x\to b^-} f_n(x)$存在，可得到：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b^-} f_n(x) = \lim_{x\to b^-}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

定理 9. (连续性) 若函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致连续，且每一项都连续，则其极限函数f在I上连续。

例子 9. 例如函数列$\{x^n\}$各项在$(-1,1]$上连续，但是极限函数为：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

说明该函数列在$(-1,1])$上不一致收敛。

推论 3. 若连续函数列$\{f_n\}$在区间I上内闭一致收敛于f，则f在I上连续。

例子 10. 例如函数列$\{x^n\}$各项在$(-1,1)$上连续，内闭一致收敛 于f，则 f在I上连续。

定理 10. (可积性) 若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则有：

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f_n(x)}\,\mathrm{dx} \tag{13}$$

例子 11. 讨论函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n\alpha_n x, & 0 \le x < \frac{1}{2n} \\ 2\alpha_n - 2n\alpha_n x, & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

的一致收敛及其极限函数的可积性。

定理 11. (可微性) 设$\{f_n\}$定义在$[a,b]$上的函数列，若$x_0 \in [a,b]$ 为$\{f_n\}$ 的收敛点，$\{f_n\}$ 的每一项在$[a,b]$上有连续的导数，且$\{f'_n\}$ 在$[a,b]$上一致收敛，则:

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \tag{14}$$

Proof. 对于$x \in [a,b]$,总有:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

推论 4. 设函数列$\{f_n\}$定义在区间I上，若$x_0 \in I$ 为$\{f_n\}$ 的收敛点，且$\{f'_n(x)\}$在I上内闭一致收敛，则f在I上可导，且有:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

例子 12. 讨论函数列

$$f_n(x) = \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2x^2\right), n = 1,2,\cdots$$

与

$$f'_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, n = 1,2,\cdots$$

导函数列$\{f'_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛，但是交换极限与导数 法则成立。说明：一致收敛是极限运算与求导运算交换的充分条件， 不是必要条件。

现在来讨论定义在区间$[a,b]$上的函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{15}$$

的连续性、逐项积分与求导的性质。

定理 12. (连续性) 若函数项级数$\sum u_n(x)$ 在区间$[a,b]$ 上一致收敛，且 每一项都连续，则和函数在$[a,b]$上也连续。

这个定理指出：在一致收敛条件下，求和运算与极限运算可以交换顺序:

$$\sum\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right) \tag{16}$$

例子 13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $[0,1]$上收敛，但是不一致收敛。

定理 13. (逐项求积) 若函数项级数$\sum u_n(x)$ 在区间$[a,b]$ 上一致收敛，且每一项都连续，则

$$\sum \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 14. (逐项求导) 若函数项级数$\sum u_n(x)$ 在区间$[a,b]$ 上每一项都有连续 导数$x_0 \in [a,b]$为$\sum u_n(x)$的收敛点，且 $\sum u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛，则：

$$\sum u_n'(x) = \left(\sum u_n(x)\right)'$$

例子 14. 证明：对于一切$x \in (-1,1)$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + = \frac{x}{(1-x)^2}$$

例子 15. 设

$$u_n(x) = \frac{1}{n^3} \ln\left(1+n^2x^2\right), n = 1, 2, \cdots,$$

证明函数项级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛， 并讨论其和函数在 $[0,1]$上的连续性、可积性和可微性。

例子 16. 证明：函数$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在$(1,+\infty)$上有连续的各阶导函数。

The **Riemann zeta function** or **Euler-Riemann zeta function** $\zeta(s)$, is a function of a complex variable that analytically continues the sum of the Dirichlet series

$$\zeta s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

which converges when the real part of s is greater than 1. More general representation of $\zeta(s)$ for all s are given below. The Riemann zeta function plays a pivital role in analytic number theory and has application in physics, probality theory, and applied statistics.

[1]

[1]Riemann zeta function

2.1 作业

2.1.1 证明题

证明函数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，且有连续的导数。

2.1.2 证明题

证明函数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在$(1,+\infty)$上连续，但级数在此区间上不一致收敛。