含參變量積分作業

武國寧

1 含參變量正常積分

1. 求下列極限

    (a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$

    (b) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$

2. 設$F(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y$,求$F'(x)$.

3. 應用對參變量的微分法，求下列積分

    (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x\ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$

    (b) $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\,\mathrm{d}x$

4. 應用積分號下的積分法，求下列積分：

    (a) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x(b>a>0)$

    (b) $\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x(b>a>0)$

5. 設

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

其中$0<k<1$(這兩個積分稱為完全橢圓積分).

(a) 試求$E(k)$與$F(k)$的導數，並以$E(k), F(k)$來表示它們；

(b) 證明$E(k)$滿足方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0$$

.

2 含參變量反常積分

1. 證明下面各題

   (a) $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$在$(-\infty,+\infty)$上一致收。

   (b) $\int_0^{\infty}e^{-x^2y}\,\mathrm{d}y$在$[a,b](a>0)$上一致收。

   (c) $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}\,\mathrm{d}y$在$[a,b](a>0)$上一致收，在$[0,b]$上不一致收。

   (d) $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$在$(-\infty,b)(b<1)$上一致收.

   (e) $\int_0^1\ln(xy)\,\mathrm{d}y$在$[-\frac{1}{b},b](b>1)$上一致收.

2. 從等式$\int_a^b e^{-xy}\,\mathrm{d}y=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$出發，計算積分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x(b>a>0)$$

3. 證明函數$F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-y)^2}$在$(-\infty,+\infty)$上連續。

4. 求下列積分

   (a) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t$

   (c) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}\,\mathrm{d}x$

3 歐拉積分

1. 計算$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right), \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$
2. 計算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u \, \mathrm{d}u, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u \, \mathrm{d}u$
3. 證明下列各式
   (a) $\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{a-1} \mathrm{d}x, a > 0$
   (b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} \mathrm{d}x = \Gamma(a)\Gamma(1-a)(0 < a < 1)$
   (c) $\int_0^1 x^p(1-x^r)^{q-1} \mathrm{d}x = \frac{1}{r} B\left(\frac{p}{r}, q\right) (p > 0, q > 0, r > 0)$
4. 證明公式
$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$$