

作業

武國寧

1 解答題

按照定義證明下列函數在其定義域上連續：

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = |x|$

2 解答題

指出下列函數的間斷點並說明其類型：

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

3. $f(x) = \lfloor |\cos x| \rfloor$

4. $f(x) = \operatorname{sgn}|x|$

5. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$

6. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

3 解答題

延拓下列函數，使其在 \mathbb{R} 上連續：

1. $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

$$2. f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$3. f(x) = x \cos \frac{1}{x}$$

4 證明題

設 f, g 在區間 I 上連續，記

$$F(x) = \max \{f(x), g(x)\}, G(x) = \min \{f(x), g(x)\}.$$

證明 F, G 在區間 I 上連續。

5 證明題

設 f 為 \mathbb{R} 上的連續函數，常數 $c > 0$ ，記

$$F(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c \\ f(x), & |f(x)| \leq c \\ c, & f(x) > c \end{cases}$$

證明 $F(x)$ 在 \mathbb{R} 上連續。

6 證明題

若對於任何充分小的 $\epsilon > 0$ ， f 在 $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ 上連續，能否推出 f 在 (a, b) 內連續？

7 解答題

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\pi - x) \tan x;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{1+2x} - \sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

8 證明題

證明：任何一個實係數奇次方程至少有一個實根。

9 證明題

試用一致連續的定義證明：若 f, g 在區間 I 上一致連續，則 $f + g$ 也在 I 上一致連續。

10 證明題

證明： $f(x) = x^2$ 在 $[a, b]$ 上一致連續，但在 \mathbb{R} 上不一致連續。