函列函作

武国宁

1 讨论下列函数列在所示区间上是否一致收敛或内闭一致收敛，说明理由

(1) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}, n=1,2,\cdots, D\in(-\infty,+\infty)$

(2) $f_n(x)=\begin{cases} -(n+1)x+1, & 0\le x\le \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1}<x<1. \end{cases} \quad n=1,2,\cdots$

(3) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}, n=1,2,\cdots, D\in(-\infty,+\infty)$

2 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}, x\in[-r,r]$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}, x\in[0,1]$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x\in(-\infty,+\infty)$

3 证明题

证明：$f_n(x)$在区间I上内闭一致收敛于f的充分且必要条件是： 对于任意$x_0 \in I$，存在x_0的一个邻域$U(x_0)$，使得 $\{f_n(x)\}$在$U(x_0) \cap I$上一致收敛于f.

4 讨论下列各函数列在所定义的区间上：

（a）$\{f_n(x)\}$ 与 $\{f_n'(x)\}$ 的一致收敛性；

(b)$\{f_n(x)\}$是否有连续，可积和可导定理的条件 与结论。

1 $f_n(x) = \dfrac{2x+n}{x+n}, x \in [0,b]$

2 $f_n(x) = x - \dfrac{x^n}{n}, x \in [0,1]$

3 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}, x \in [0,1]$

5 (计算题)

设$S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}, x \in [-1,]$ 计算

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$$

6 证明题

证明函数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，且有连续的导数。

7 证明题

证明函数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在$(1,+\infty)$上连续，但级数在此区间上不一致收敛。