

# Homework

Guoning Wu

December 30, 2020

# 1 作業

## 1.1 證明題

1. 證明：若分割 $\tilde{P}$ 是分割 $P$ 增加若干分點得到的分割，則有：

$$\sum_{\tilde{P}} \omega'_i \Delta x'_i \leq \sum_P \omega_i \Delta x_i$$

2. 證明：若 $f$ 在 $[a, b]$ 上可積， $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ ，則 $f$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上也可積。
3. 設 $f, g$ 均為定義在 $[a, b]$ 上的有界函數，僅在有限個點處 $f(x) \neq g(x)$ ，證明：若 $f$ 在 $[a, b]$ 上可積，則 $g$ 在 $[a, b]$ 上也可積，且有：

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

4. 設 $f$ 在 $[a, b]$ 上有界， $\{a_n\} \subset [a, b]$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ ，證明：若 $f$ 在 $[a, b]$ 上只有 $a_n, n = 1, 2, \dots$ 為其間斷點，則 $f$ 在 $[a, b]$ 上可積。
5. 證明：若 $f \in C[a, b]$ 且 $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ 則以下結果成立：

- (a) 如果函數 $f(x)$ 存在一點 $f(x_0) > 0, x_0 \in [a, b]$ ，則有：

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

- (b) 若 $\int_a^b f(x) = 0$ ，則有 $f(x) \equiv 0$

6. 證明若 $f \in C[a, b], f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ ，且 $M = \max_{[a, b]} f(x)$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = M$$

7. 證明黎曼函數

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \text{互質}, q > p, \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 其它}(0,1) \text{內無理數} \end{cases}$$

在區間 $[0, 1]$ 上可積。

8. 證明：對於任意的實數 $a, b, c$ ，只要 $\int_a^b f(x) dx, \int_a^c f(x) dx, \int_c^b f(x) dx$ 都存在，則有：

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

9. 判斷下列積分的大小：

(a)  $\int_0^1 x \, dx$  和  $\int_0^1 x^2 \, dx$

(b)  $\int_1^2 x \, dx$  和  $\int_1^2 x^2 \, dx$

(c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$  和  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx$

10. 設  $f(x)$  在  $[a, b]$  上連續， $f(x) \geq 0$  但不恆為 0，證明：

$$\int_a^b f(x) \, dx > 0$$

11. 設  $f(x)$  在  $[a, b]$  上連續，且  $\int_a^b f^2(x) \, dx = 0$ ，證明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上恆為 0.

12. 設  $f(x)$  在  $[a, b]$  上連續，在  $(a, b)$  內可導，且滿足：

$$\frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) \, dx = f(b)$$

證明：存在  $\xi \in (a, b)$ ，使得  $f'(\xi) = 0$ 。

13. 設  $y = f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的嚴格單調增加的連續函數，且  $f(0) = 0$ ，記它的反函數為  $x = f^{-1}(y)$ 。證明：

$$\int_0^a f(x) \, dx + \int_0^b f(y) \, dy \geq ab \quad (a > 0, b > 0)$$

14. 計算下列定積分

(a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x \, dx$

(b)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx$

(c)  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \quad (a > 0)$

(d)  $\int_0^1 \frac{1}{(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}} \, dx \quad (a > 0)$

(e)  $\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$

(f)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \, dx$

(g)  $\int_0^1 \arcsin x \, dx$   
 (h)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$   
 (i)  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \, dx$   
 (j)  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, dx$   
 (k)  $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx (a > 0)$   
 (l)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$

15. 求下列極限

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 \, dt$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} \, dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} \, dt}$

16. 求下列曲線的弧長

(a)  $y = x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 4$   
 (b)  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (a > 0), 0 \leq t \leq 2\pi$   
 (c)  $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3} (a > 0), 0 \leq \theta \leq 3\pi$

17. 求下列平面曲線繞旋轉軸所圍成立體的體積

(a)  $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ , 繞  $x$  軸。  
 (b)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ , 繞  $x$  軸。  
 (c)  $r = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$ , 繞極軸。

18. 求下列平面曲線繞指定軸旋轉得到的面積

(a)  $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ , 繞  $x$  軸。  
 (b)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ , 繞  $x$  軸。  
 (c)  $r = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$ , 繞極軸。

19. 討論下列積分是否收斂？若收斂，則求其極限。

- (a)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$   
 (b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$   
 (c)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx$   
 (d)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$   
 (e)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$   
 (f)  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$   
 (g)  $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$   
 (h)  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$   
 (i)  $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$

20. 討論下列積分的收斂性

- (a)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$   
 (b)  $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x} dx$   
 (c)  $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{x^3+1} dx$   
 (d)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n+1} dx (m, n \geq 0)$   
 (e)  $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$   
 (f)  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$   
 (g)  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx$   
 (h)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$

21. 討論下列去窮積分為絕對收斂還是條件收斂

(a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx$

(b)  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x dx$