Mean Value Theorem

Guoning Wu

September 16, 2019

1 作業

1.1 第一部分：微分中值定理

1. 討論下列函數在指定的區間內是否存在一點，使得$f'(\xi)=0$

   (a) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & 0<x\le\frac{1}{\pi} \\ 0, & x=0 \end{cases}$

   (b) $f(x)=|x|, -1\le x\le 1.$

2. 證明：

   (a) 方程$x^3-3x+c=0(c\in\mathbb{R})$在區間$[0,1]$內不可能有兩個不同的實根。

   (b) 方程$x^n+px+q=0(n\in\mathbb{Z}^+, p, q\in\mathbb{R})$ 當n為偶數是至多有兩個實根，當n為奇數是至多有三個實根。

3. 證明：

   (a) 若函數f在$[a,b]$上可導，且$f'(x)\ge m$，則

   $$f(b)\ge f(a)+m(b-a)$$

   (b) 若函數f在$[a,b]$上可導，且$|f'(x)|\le M$，則

   $$|f(b)-f(a)|\le M(b-a)$$

4. 應用Lagrange中值定理證明下列不等式：

   (a) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}, 0<a<b.$

(b) $\dfrac{h}{1+h^2} < \arctan h < h, h > 0$

5. 應用函數的單調性證明下列不等式：

   (a) $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

   (b) $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

   (c) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2(1+x)}, x > 0$

1.2 第二部分：利用導數求極限

1. 設函數f在點a處具有二階連續導數，證明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

2. 設函數f在$[a,b]$上可導，證明：存在$\xi \in (a,b)$，使得：

$$2\xi\left[f(b)-f(a)\right] = (b^2-a^2)f'(\xi)$$

3. 求下列不定極限

   (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$

   (2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

   (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$

   (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

   (5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$

   (6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

   (7) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x^{\sin x}$

   (8) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{1-x}}$

   (9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0_+} \sin x \ln x$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(13) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$

(14) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\arctan x)(\ln x)$

(15) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{\sin x}$

(16) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

(17) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$

(18) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

(19) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

(20) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

1.3 第三部分：Talor公式

1. 求下列函數帶佩亞諾型的麥克勞林公式

   (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$。

   (b) $f(x) = \arctan x$到含x^5的項。

   (c) $f(x) = \tan x$到含x^5的項。

2. 利用Taylor公式求下列函數的極限

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x} - \cot x\right]$

3. 求下列函數在指定點處帶拉格朗日型余項的n階Taylor公式

    (a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5$，在$x = 1$處。

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$，在$x = 0$處。

1.4 第四部分：單調，凹凸

1. 求下列函數的極值

    (a) $f(x) = 2x^3 - x^4$

    (b) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

    (c) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

    (d) $f(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

2. 證明：若函數f在x_0處滿足$f'_+(x_0) < 0(> 0), f'_-(x_0) > 0(< 0)$，則$x_0$為函數$f$的極大值(極小值)點。

3. 證明：設函數f在區間I上連續，並且在I上僅有唯一的極值點x_0，證明若x_0為f的極大（小）值點，則x_0是f在I上的最大（小）值。

4. 求下列函數在給定區間上的最大最小值

    (a) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1, 2]$

    (b) $y = 2\tan x - \tan^2 x, [0, \dfrac{\pi}{2}]$

    (c) $y = \sqrt{x}\ln x, [0, +\infty]$

    (d) $y = |x(x^2-1)|$

    (e) $y = \dfrac{x(x^2+1)}{x^4 - x^2 + 1}$

5. 求下列函數的凹凸區間及其拐點

    (a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$

    (b) $y = x + \dfrac{1}{x}$

    (c) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

    (d) $y = \ln(x^2+1)$

(e) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

6. 應用凸函數的概念證明以下不等式

   (a) 對於任意的實數$a, b, e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{1}{2}(e^a + e^b)$

   (b) 對於任何非負實數$a, b, 2\arctan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b$