

Homework

武國寧

1 求下列冪級數的收斂半徑與收斂區域

$$(1) \sum nx^n$$

$$(2) \sum \frac{x^n}{n^2 2^n}$$

$$(3) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$(4) \sum \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$(5) \sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

$$(6) \sum \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

2 應用逐項求導或者積分的方法求下列冪級數的和函數，同時指出它們的定義域。

$$(1) x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(2) 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + \cdots + n(n+1)x^n + \cdots$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$

3 利用已知函數幕級數的展開式，求下列函數在 $x = 0$ 處的幕級數展開，並確定收斂於該函數的區間。

(1) e^{x^2}

(2) $\frac{x^{10}}{1-x}$

(3) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

(4) $\sin^2 x$

(5) $\frac{e^x}{1-x}$

(6) $\frac{x}{1+x-2x^2}$

(7) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

(8) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

4 求下列函數在 $x = 1$ 處的泰勒級數

(1) $f(x) = 3 + 2x - 4x^2 + 7x^3$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$

(3) $f(x) = \sqrt{x^3}$