

# 作业

武国宁

## 1 证明下列级数收敛，并求其和

$$(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

## 2 证明题

证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$ .

## 3 证明题

证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ，则：

$$(1) \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) \text{发散；}$$

$$(2) \text{当} b_n \neq 0 \text{时，级数} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}.$$

#### 4 利用上述结果求下列级数的和

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

#### 5 应用柯西收敛原理证明下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$$

#### 6 判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum \frac{1}{n^2+a^2}$$

$$(2) \sum 2^n \frac{\pi}{3^n}$$

$$(3) \sum \frac{\pi}{n \sqrt[n]{n}}$$

$$(4) \sum \frac{(n+1)!}{10^n}$$

$$(5) \sum \frac{n^2}{2^n}$$

#### 7 采用积分判别法判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum \frac{1}{n^2+1}$$

$$(2) \sum \frac{n}{n^2+1}$$

## 8 证明题

设  $a_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$  且  $\{na_n\}$  有界, 证明  $a_n^2$  收敛。

## 9 下列级数那些条件收敛, 那些绝对收敛, 那些发散

$$(1) \sum \frac{\sin nx}{n!}$$

$$(2) \sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \sum (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

$$(4) \sum n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

## 10 应用阿贝尔和狄利克雷方法, 判断下列级数的敛散

$$(1) \sum \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}, (x > 0)$$

$$(2) \sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}, x \in (0, 2\pi), \alpha > 0$$

$$(3) \sum (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$$