测试题：曲线曲面积分解答

武国宁

1 填空题

1. 设L是上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2, y\geq 0, a>0$，其方向为顺时针方向，则曲线积分$\int_L (e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y=-\dfrac{m}{2}\pi a^2$

2. 设Σ为下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$的下侧，则曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{6}{5}\pi$

3. 设曲线Γ 为柱面$y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x=0$ 的交线，从x轴正向看去是逆时针方向， 则曲线积分$\oint_\Gamma (e^x+x^2y^2z^3)\mathrm{d}x+(e^y-y^2z)\mathrm{d}y+(e^x+yz^2)\ \mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{2}a^4$

4. 若$\dfrac{(2x+3y)\mathrm{d}x+(3x+2y)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^m}$， $x^2+y^2\neq 0$是某个二元函数的全微分，则$m=0$

5. 向量场$\mathbb{A}(x,y,z)=(z+\sin y)\vec{i}+(x\cos y-z)\vec{j}$的旋度为$\mathrm{rot}\ \mathbb{A}=(1,1,0)$

2 选择题

1. 设L为连接$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$三点的封闭曲线，则$\oint_L (x+y)\ \mathrm{d}s=(B)$

   (a) $1-\sqrt{2}$
   (b) $1+\sqrt{2}$
   (c) $\sqrt{2}-1$

(d) $\sqrt{2}+1$

2. 设曲线积分$\int_C xy^2\mathrm{d}x+yg(x)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$g(x)$ 具有连续的导函数，　且$g(0)=0$, 则$\int_{(0,0)}^{(1,2)} xy^2\mathrm{d}x+yg(x)\mathrm{d}y=(B)$

   (a) 3
   (b) 2
   (c) 4
   (d) 1

3. 设Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$z=0$和$z=1$之间的部分，则$\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=(B)$

   (a) π
   (b) $\sqrt{2}\pi$
   (c) $\frac{4}{3}\pi$
   (d) $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

4. 设Σ为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$, $z=1$所截得部分的外侧，则曲面积分$\iint\limits_\Sigma z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y+(x^2-yz)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z=(A)$

   (a) 0
   (b) $\frac{\pi}{2}$
   (c) π
   (d) 2π

5. 设Σ是光滑有界的封闭曲面，$f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$是Σ上具有有界连续偏导数的函数，Σ的方向指向内侧，且$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z}\geq 0$, 且存在不等于0的点，则$(C)$

   (a) $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

(b) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$

(c) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0$

(d) 无法确定$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的符号

3 计算题

计算曲线积分$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中$L:(x-1)^2+y^2=4$, 沿逆时针方向.

解：适当选取$\varepsilon>0$, 作椭圆周$L_1: x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t, y=\varepsilon\sin t$, 即：$4x^2+y^2=\varepsilon^2$ 使得L_1包含在L 的内部，并取L_1的方向为顺时针方向，记L, L_1所包围的区域为D, (2分)

记：$P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$则在区域$D$ 上$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$ (3分)

由格林公式可知$\oint_{L+L_1}\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ (2分)

从而$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = -\oint_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t = \pi$ (3分)