中国石油大学(北京)

《数学分析I》2018-2019-1 期中测试题

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

班级______________

姓名______________

学号______________

I　填空题(每题3分,共15分)

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$的定义描述为________________。

(2) 设$f(x)$在0点可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2}=$________。

(3) 函数$y=\mathbf{sgn}(\sin x)$的间断点为________。

(4) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则$a$=________。

(5) 若函数$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在$x=0$处连续，则$a=$________。

II　选择题(每题3分,共15分)

(1) 设$f(x)$在$x=a$处连续，$\psi(x)$在$x=a$处间断，又$f(a)\neq 0$，则( )

(A) $\psi[f(x)]$在$x=a$处间断.　　(B) $f[\psi(x)]$在$x=a$处间断.

(C) $\psi^2(x)$在$x=a$处间断.　　(D) $\dfrac{\psi(x)}{f(x)}$在$x=a$处间断.

(2) 当$n\to+\infty$时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$ 是$\dfrac{1}{n}$的(　)

(A) 高阶无穷小.　　(B) 低阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但非等价无穷小.

(3) 若$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n=0$， 则下列正确的是(　)

(A) 若x_n发散，则y_n必收敛.　　(B) 若x_n无界，则y_n必有界.

(C) 若x_n有界，则y_n必为无穷小.　　(D) 若x_n无穷大， 则y_n必为无穷小.

(4) 设函数$y=f(x)$可微，且曲线$f'(x)\neq 0$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{dy}$=(   )

(A)0. (B)1. (C)-1. (D)不存在.

(5) 设$f'(a)>0$，则$\exists\delta>0$有(   )

(A) $f(x)\geq f(a),\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$.

(B) $f(x)\leq f(a),\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$.

(C) $f(x)>f(a),\forall x\in(a,a+\delta);f(x)<f(a),\forall x\in(a-\delta,a)$.

(D) $f(x)<f(a),\forall x\in(a,a+\delta);f(x)>f(a),\forall x\in(a-\delta,a)$.

III 计算题(每题4分,共40分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\ (a>0,b>0,c>0)$

2. 设$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2},x_1=\sqrt{2}$, 证明该数列收敛，并求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

3. 设$y=f(x+y)$,其中f具有二阶导数,且$f'\neq 1$, 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

4. 设$y=\sin^2 x$,求$y^{(n)}$

5. 设$\begin{cases} x &= \ln(1+t^2) \\ y &= \arctan(t) \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

6. 利用微分计算$\sin 30^0 30'$($30'=\dfrac{\pi}{360}\approx 0.0087$)的近似值。

7. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$

8. 求$\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$

9. 求$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

10. 求$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

IV　证明题(本题10分)

设函数$f(x)$:

1. 在$[x_0, x_n]$有定义且有连续的$n-1$阶导函数$f^{(n-1)}(x)$;
2. 在区间(x_0, x_n)内具有n阶导数;
3. $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$.

证明：在(x_0, x_n)内至少有一$\xi \in (x_0, x_n)$,使得$f^{(n)}(\xi) = 0$.

V　论述题(每小题5分，共10分)

1. 指出函数$\dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]$的间断点， 并指出其类型。
2. 求函数$y = \sqrt{1-\cos x}$在不可导点处的 左右导数。

VI　证明题(本题10分)

证明$\sin\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$ 上不一致连续，但在$(a,1)(a>0)$上一致连续。

VII 计算题(每小题5分，共10分)

1. 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=2$, 求$a,b$之值。

2. 已知$y=a^x+x^a+x^x, a>0$, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

VIII 求下列函数在指定点的带有拉格朗日型余项的n阶Taylor多项式，(每题10分，共20分)

1. $f(x)=\sin x, x_0=0$

2. $f(x)=\ln(1+x), x_0=0$

IX 求下列函数在$x_0=0$点的带有佩亚诺型余项到指定阶次(n次)的Taylor展开式(每题5分，共20分)

1. $f(x)=\tan x, n=4$

2. $f(x)=\ln(\cos x), n=6$

3. $f(x)=e^{\sin x}, n=4$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, n = 4$