

测试题：多元函数积分学

武国宁

1 填空题

1. 交换积分次序 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy =$ _____

2. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy =$ _____

3. 设积分区域 D 由 $x^2 + y^2 \leq 4$ 确定, 则 $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} d\sigma =$ _____

4. 已知 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = x^2 + (x+y) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma$, 则 $f(x, y) =$ _____

5. 设 $f(u)$ 有连续的一阶导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 3, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2\}$. 则 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy =$ _____

6. 若区域 $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 则二重积分 $\iint_D \operatorname{sgn}(y - x^2) dx dy =$ _____

7. $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x| + |y|) d\sigma =$ _____

8. 若 Ω 是由 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy$ 所确定的区域, 则 $\iiint_{\Omega} e^{x^2+y^2} dv =$ _____

9. 设 Ω 由旋转双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 平面 $z = -1, z = 1$ 所围成, 则 $\iiint_{\Omega} x + y + z^2 dv =$ _____

10. 设 Ω 由 $x^2 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 所确定, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dv =$ _____

2 选择题

1. 设 D 为单位圆域, $x^2 + y^2 \leq 1$, $I_1 = \iint_D (x^3 + y^3) dx dy$, $I_2 = \iint_D (x^4 + y^4) dx dy$, $I_3 = \iint_D (2x^6 + y^5) dx dy$, 则()

(a) (A) $I_1 \leq I_2 \leq I_3$

(b) (B) $I_3 \leq I_1 \leq I_2$

(c) (C) $I_3 \leq I_2 \leq I_1$

(d) (D) $I_1 \leq I_3 \leq I_2$

2. 设 $I = \iint_{(x^2+y^2) \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$, $J = \iint_{|x|+|y| \leq 1} \sin(x^2 + y^2) dx dy$, $K = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$ 则 I, J, K 的大小关系是()

(a) (A) $I \leq J \leq K$

(b) (B) $J \leq K \leq I$

(c) (C) $K \leq I \leq J$

(d) (D) $K \leq J \leq I$

3. 已知 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面与平面 $z = 5$ 所围成的闭区域, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = ()$

(a) (A) $\frac{250}{3}\pi$

(b) (B) π

(c) (C) -250π

(d) (D) 250π

4. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \leq 0\}$ 则三重积分 $I = \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 dV$ 等于()

(a) (A) Ω 体积的4

(b) (B) $\int_0^\pi d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\varphi \int_0^2 r^4 \sin \theta \, dr$

(c) (C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r^4 \sin \varphi \, dr$

(d) (D) $\int_0^\pi d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\varphi \int_0^2 r^4 \sin \varphi \, dr$

5. 设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围成的区域, $f(x, y, z)$ 连续, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv$ 等于()

(a) (A) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)dz$

(b) (B) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)dz$

(c) (C) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)dz$

(d) (D) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z)dz$

3 计算题

求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 含于旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 内部部分的面积。