测试题：多元函数积分学

武国宁

1 填空题

1. 交换积分次序$\int_1^e \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{e^y}^e f(x,y)\mathrm{d}x$

2. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

3. 设积分区域D 由$x^2+y^2 \leq 4$ 确定，则$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2} d\sigma = \pi \ln 5$

4. 已知$f(x,y)$连续，且$f(x,y) = x^2+(x+y)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则$f(x,y) = x^2 + \frac{\pi}{4}(x+y)$

5. 设$f(u)$有连续的一阶导数，且$f(0) = 0, f'(0) = 3$，$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant t^2\}$. 则$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^3} \iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$

6. 若区域$D: -1 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1,$ 则二重积分$\iint\limits_D \mathrm{sgn}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$

7. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (|x|+|y|)\mathrm{d}\sigma = \frac{4}{3}$

8. 若Ω是由$0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1,\ \ 0 \leq z \leq xy$ 所确定的区域，则$\iiint\limits_\Omega e^{x^2+y^2}\mathrm{d}v = \frac{1}{4}(e-1)^2$

9. 设Ω由旋转双曲面$x^2+y^2-z^2=1$, 平面$z=-1$, $z=1$所围成，则$\iiint\limits_{\Omega} x+y+z^2 \ \mathrm{d}v=\dfrac{16\pi}{15}$

10. 设Ω由$x^2+\dfrac{y^2}{2^2}+\dfrac{z^2}{3^2}\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$所确定，则$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\dfrac{28}{45}\pi$

2 选择题

1. 设D为单位圆域，$x^2+y^2\leqslant 1, I_1=\iint\limits_{D}(x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_{D}(x^4+y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_{D}(2x^6+y^5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则(D)

   $(A) I_1\leq I_2\leq I_3$, $(B) I_3\leq I_1\leq I_2$, $(C) I_3\leq I_2\leq I_1$, $(D) I_1\leq I_3\leq I_2$

2. 设$I=\iint\limits_{(x^2+y^2)\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $J=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$则$I, J, K$的大小关系是(B)

   $(A) I\leq J\leq K$, $(B) J\leq K\leq I$, $(C) K\leq I\leq J$, $(D) K\leq J\leq I$

3. 已知Ω是由曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转而成的曲面与平面$z=5$所围成的闭区域, 则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$=(A)

   $(A)\dfrac{250}{3}\pi$, $(B)\pi$, $(C)-250\pi$, $(D)250\pi$

4. 设$\Omega=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\leq 4, y\geq 0, z\leq 0\}$则三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} x^2+y^2+z^2 dV$等于(D)

   (A) Ω体积的4, (B) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\sin\theta\ \mathrm{d}r$, (C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\sin\varphi\ \mathrm{d}r$,

   (D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\sin\varphi\ \ \mathrm{d}r$

5. 设Ω是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=1$所围成的区域，$f(x,y,z)$连续，则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$等于(C)

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

(B) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

(C) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

(D) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{1}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

3 计算题

求球面$x^2+y^2+z^2=4z$ 含于旋转抛物面$z=x^2+y^2$ 内部部分的面积。解：球面与旋转抛物面的交线为：

$$\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ z=3 \end{cases} \quad \mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(4分) （注意，没有单独写本部分，后面计算中表达正确不扣分）

$$S=\iint\limits_{D_{xy}} \frac{2}{\sqrt{\sqrt{4-x^2-y^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}r\mathrm{d}r \qquad (4分)$$

$$=4\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}r\mathrm{d}r=4\pi$$

(2分)