A卷

中国石油大学（北京）2019—2020学年第一学期

《数学分析III》期末试卷

考试方式（闭卷考试）

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、 解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 判别级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{n^2+a^2}$的敛散性.

解：因为

$$\frac{\pi}{n^2+a^2}\sim\frac{\pi}{n^2}----3$$

级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{n^2}$收敛，根据比较判别法，原级数收敛。－－－－3

2. 求级数$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$的和.

解：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}----3$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}----3$$

3. 讨论级数$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$绝对或条件收敛。

解：令$u_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，（1）单调递减趋于 0；（2）该级数为莱布尼茨交错项级数。根据莱布尼茨收敛定理，该级数收敛。－－－－3

又因为$\left|(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right|=\left|\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right|=\frac{\ln(n+1)}{n+1}>\frac{1}{n+1}$，所以该级数条件收敛，非绝对收敛。

－－－－3

4. 证明级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

解： 因为$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，－－－－3

根据 M 判别法得到：级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。－－－－3

5. 求幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$的收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=1----3$

因为$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$收敛，所以幂级数的收敛域为：$[-1,1]----3$

二、证明题（本题 15 分）求函数$\frac{1}{x^2+3x+2}$在$x_0=1$处的幂级数展开式，并求出收敛域.

解：

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{3+(x-1)}----4$$

$$\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n,x\in(-1,3)----4$$

$$\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n,x\in(-2,4)----4$$

所以，

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{3+(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{2^n}-\frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{3^n}\right](x-1)^n\ ,$$

$$x\in(-1,3)----3$$

三、解答题（本题 15 分） 求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$的和函数。

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n=x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}=xg(x),x\in(-1,1)----4$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}$$

$$\int_0^x g(t)\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}n^2t^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2\int_0^x t^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}nx^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=xh(x)----4$$

$$\int_0^x h(t)\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n\int_0^x t^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^n=\frac{x}{1+x},x\in(-1,1)----3$$

$$h(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$g(x)=\frac{d}{dx}(xh(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)=\frac{1-x}{(1+x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n = xg(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, x \in (-1,1) ----4$$

四、解答题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$在$x \in [-r,r]$上一致收敛。

   解：因为

$$\left|\frac{x^n}{(n-1)!}\right| \le \frac{r^n}{(n-1)!} ----3$$

   有因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{(n-1)!}$收敛，　根据优级数判别法，知级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$在$x \in [-r,r]$上一致收敛。－－－－2

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{n}(x+2)^n$的收敛区间。

   解：

$$\sqrt[n]{\left|\frac{4^n+(-3)^n}{n}\right|} \to 4 ----3$$

   所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{n}(x+2)^n$的收敛半径为$\frac{1}{4}$，收敛区间为$\left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right) ----2$

3. 若函数列$\{f_n(x)\} = \{xn^k e^{-nx}\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛，求$k$的取值范围？

   解：

$$\frac{d}{dx}(xn^k e^{-nx}) = n^k e^{-nx}(1-nx) ----3$$

$$\sup xn^k e^{-nx} = n^{k-1}e^{-1}$$

   所以，当$k<1$时级数一致收敛。－－－－2

五、解答题（本小题 15 分）

将函数$f(x) = x^2$在指定区间$[0,2\pi]$展开成 Fourier 级数.

解：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^2 \quad ----3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nxdx = \frac{4}{n^2}, \quad n=1,2,\cdots\cdots, \quad ----4$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nxdx = -\frac{4}{n}\pi, \quad n=1,2,\cdots\cdots, \quad ----4$$

$$f(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,2\pi) \\ 2\pi^2, & x = 0,2\pi \end{cases} \quad ----4$$

六、解答题（本小题 10 分）设$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$,

(1) 求$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$;

(2) 试证明对于任意的常数$\lambda > 0$, 级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} a_n$收敛。

解：

(1)

$$\frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x + \tan^{n+2} x \, dx = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, d\tan x$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n(n+1)} \quad ----4$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad ----2$$

(2) 试证明对于任意的常数$\lambda > 0$,

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx > a_{n+2}$$

$$a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, a_n < \frac{1}{2(n-2)}$$

$$\frac{1}{n^\lambda} a_n < \frac{1}{2(n-2)} \frac{1}{n^\lambda} \quad ----3$$

所以，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} a_n$收敛。 ----1