

A 卷

中国石油大学（北京）2019—2020 学年第一学期

《数学分析 III》期末试卷

考试方式（闭卷考试）

班级： _____

姓名： _____

学号： _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（试卷不得拆开，所有答案均写在题后相应位置）

一、解答题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 判别级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi}{n^2+a^2}$ 的敛散性.

2. 求级数 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$ 的和.

3. 讨论级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 绝对或条件收敛.

4. 证明级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

5. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域.

二、证明题（本题 15 分）求函数 $\frac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x_0 = 1$ 处的幂级数展开式，并求出收敛域.

三、解答题（本题 15 分） 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$ 的和函数。

四、解答题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$ 在 $x \in [-r, r]$ 上一致收敛.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{n}(x+2)^n$ 的收敛区间.

3. 若函数列 $\{f_n(x)\} = \{xn^k e^{-nx}\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 求 k 的取值范围?

五、解答题 (本题 15 分) 将函数 $f(x) = x^2$ 在指定区间 $[0, 2\pi]$ 展开成 Fourier 级数.

六、解答题（本小题 10 分） 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$,

(1) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$;

(2) 试证明对于任意的常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} a_n$ 收敛.