《數學分析I》第一章測試題

武國寧

Friday 4^{th} January, 2019

班級______________ 姓名______________ 學號______________

求下列函數的極限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+3^n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5}{e^n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha}(\alpha \geq 1)$

證明題

設$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 證明：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$
2. 若$a_n > 0(n=1,2,\cdots)$, 則$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$

證明題

設$a > 0, \sigma > 0, a_1 = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{\sigma}{a}\right), a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n}\right)$ 證明：數列$\{a_n\}$收斂，且極限為$\sqrt{\sigma}$。

解答題

敘述數列$\{a_n\}$發散的柯西判定法則，並利用該判定法則證明以下數列發散：

1. $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$.
2. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

證明題

敘述數列$\{a_n\}$為無界數列的定義。若$\{a_n\}$, $\{b_n\}$為無界數列，試問$\{a_nb_n\}$是否為無界數列，若是，給出證明。若否，舉出反例。