

《數學分析I》第二章測試題

武國寧

Monday 12th November, 2018

班級_____ 姓名_____ 學號_____

求下列函數的極限

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} (m, n \in \mathbb{N}^+)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$

7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

9. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$

設 $x \rightarrow 0^+$ ，證明下列等式

1. $2x - x^2 = O(x)$

2. $x \sin \sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}})$

3. $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$

4. $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\epsilon}\right) (\epsilon > 0)$

利用 $\epsilon - \delta$ 語言證明下列函數的連續性

1. \sqrt{x}

2. $\sin x$

指出下列函數的不連續點，並指出其類型

1. $x - [x]$

2. $[x] \sin \pi x$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} (x \geq 0)$

證明題

證明黎曼函數

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

在無理數點連續，其它點處發散。