數學分析中一些“奇怪”函數的構造與作圖

武國寧*; 中國石油大學-北京任教。孫娜，中國石油大學-北京任教。

January 18, 2018

1 引言

數學分析中有許多和人們的直觀認識不吻合的“奇怪”函數， 對於該類函數的研究有助於人們更好的認識分析中的一些定義。 對於這些“奇怪”函數的研究有時會助推一門新學科的產生。

1872年Weierstrass給出了一個處處連續， 處處不可導的函數 [4]。 在當時，許多數學家認為這樣的函數不可能存在。 Weierstrass函數被認為是第一個分形的例子，儘管在當時還沒有分形的概念。 1903年Takagi構造了一個處處連續，處處不可導的函數， 人們稱之為Takagi函數 [1]。兩者的區別在於： Weierstrass函數在任何點導數不存在也不是無窮大；Takagi函數雖然不可導， 但在有些點的導數為無窮大。Takagi函數在實分析和數論中有著重要的應用。 1875年Thomae根據Dirichlet函數[1]定義了一個新的函數，人們稱之為Thomae函數[2]。 該函數在無理數點連續，在有理數點間斷 [6]。

至今，數學家們一直在探索如何構造這些“奇怪”函數， 研究這些“奇怪”函數的性質，應用及其作圖。本文首先給出了兩種構造處處連續， 處處不可導函數的方法。通過計算機作出了這類函數的圖像。 最後，本文推廣了Thomae函數。該類函數在無理數點連續，有理數點間斷。 通過計

*電子郵件: wuguoning@163.com

[1]Dirichlet函數定義在區間$[0, 1]$上， 該函數在有理數點的取值為1，在無理數點的取值為0，但是該函數無法通過計算機 實現作圖。

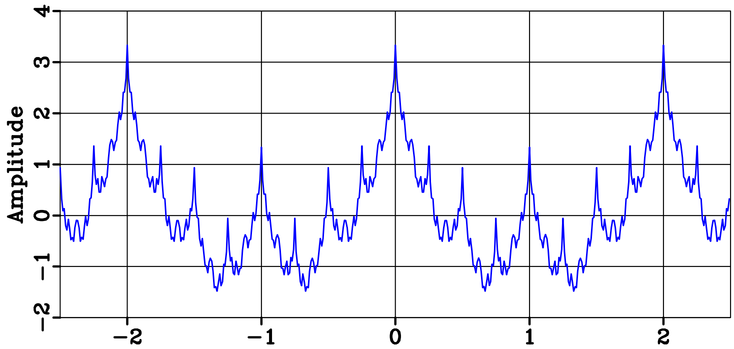

圖 1: Weierstrass函數，$a = 0.7, b = 2$.

算機作圖，給出了推廣後函數的圖像。這些工作有助於提高人們的直觀認識。

2 處處連續，處處不可導函數的構造方法與作圖

2.1 Weierstrass函數

1872年Weierstrass給出了一個處處連續，處處不可導函數， 後來被稱為Weierstrass函數，其表達式為:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \tag{1}$$

這裡$0 < a < 1, b \in \mathbb{N}^+$ 且 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$。 圖 1為$a = 0.7, b = 2$ 截取公式 1的前30項畫出的函數的圖像； 圖 2為$a = 0.7, b = 200$ 截取公式 1的前30項畫出的函數的圖像。 從圖中可以看出：隨著b的增大，函數趨於不光滑。Weierstrass函數被認為是第一個和分形有關的函數， 現在Weierstrass函數已經成為處處連續，處處不可導函數的代名詞。

下面介紹兩種構造處處連續，處處不可導函數的方法。

2.2 Bourbaki函數及其推廣

Bourbaki通過迭代方法，構造了一個處處連續， 處處不可導的函數，稱之為Bourbaki函數 [3]。 該函數的構造過程如下：$f_0(x) = x, x \in$

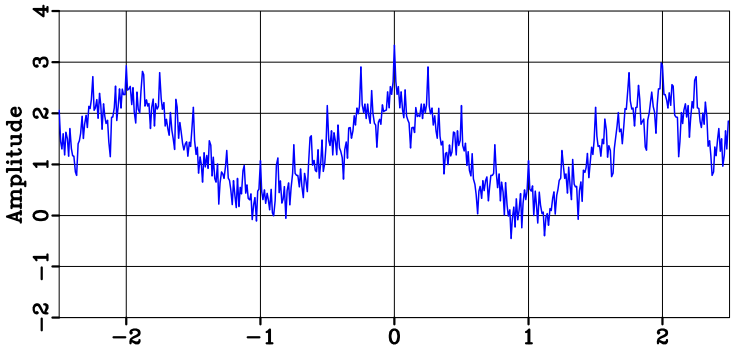

圖 2: Weierstrass函數，$a = 0.7, b = 200$.

$[0,1]$, $f_i(x)$為定義在$[0,1]$上的連續函數，該函數在 子區間$\left[\frac{k}{3^i}, \frac{k+1}{3^i}\right], k = 0, 1, 2, \cdots, 3^i - 1$ 上為線性函數。迭代過程定義如下：

(1) $f_{i+1}\left(\frac{k}{3^i}\right) = f_i\left(\frac{k}{3^i}\right)$,

(2) $f_{i+1}\left(\frac{3k+1}{3^{i+1}}\right) = f_i\left(\frac{k}{3^i}\right) + \frac{2}{3}\left[f_i\left(\frac{k+1}{3^i}\right) - f_i\left(\frac{k}{3^i}\right)\right]$,

(3) $f_{i+1}\left(\frac{3k+2}{3^{i+1}}\right) = f_i\left(\frac{k}{3^i}\right) + \frac{1}{3}\left[f_i\left(\frac{k+1}{3^i}\right) - f_i\left(\frac{k}{3^i}\right)\right]$,

(4) $f_{i+1}\left(\frac{k+1}{3^i}\right) = f_i\left(\frac{k+1}{3^i}\right)$.

Bourbaki函數定義如下：

$$f_{\frac{2}{3}}(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x). \tag{2}$$

圖 3為函數 2迭代10次的函數圖像， 從圖中可以看出：隨著迭代次數的增加，函數趨於不光滑。Bourbaki函數可以被 推廣為：$f_0(x) = x, x \in [0,1]$，每個$f_i(x)$ 在區間$\left[\frac{k}{3^i}, \frac{k+1}{3^i}\right], k = 0, 1, 2, \cdots, 3^i - 1$ 為線性函數。迭代過程如下：

(1) $f_{i+1}\left(\frac{k}{3^i}\right) = f_i\left(\frac{k}{3^i}\right)$,

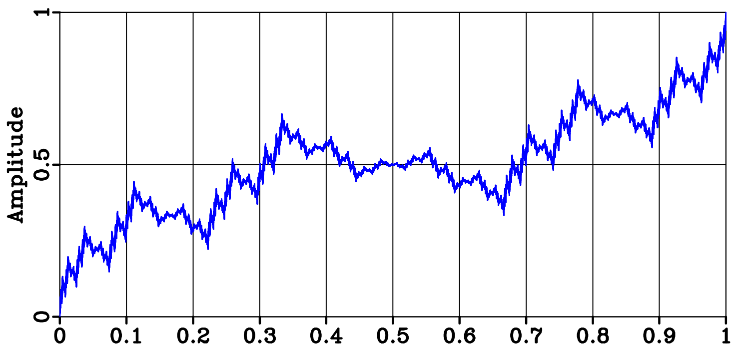

圖 3: Bourbaki函數，$\alpha = \frac{2}{3}$.

(2) $f_{i+1}\left(\dfrac{3k+1}{3^{i+1}}\right) = f_i\left(\dfrac{k}{3^i}\right) + \alpha\left[f_i\left(\dfrac{k+1}{3^i}\right) - f_i\left(\dfrac{k}{3^i}\right)\right]$,

(3) $f_{i+1}\left(\dfrac{3k+2}{3^{i+1}}\right) = f_i\left(\dfrac{k}{3^i}\right) + (1-\alpha)\left[f_i\left(\dfrac{k+1}{3^i}\right) - f_i\left(\dfrac{k}{3^i}\right)\right]$,

(4) $f_{i+1}\left(\dfrac{k+1}{3^i}\right) = f_i\left(\dfrac{k+1}{3^i}\right)$.

這裡$\alpha \in (0,1)$，推廣後的Bourbaki函數定義為：

$$f_\alpha(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x). \tag{3}$$

Okamoto證明了[5]：(1)$\alpha \le \dfrac{1}{2}$時，$f_\alpha(x)$連續不減且幾乎處處可導；(2)$\dfrac{2}{3} \le \alpha < 1$時，$f_\alpha(x)$處處連續，處處不可導；(3)$\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{2}{3}$時，$f_\alpha(x)$在無窮個點處可導。

若$\alpha = \frac{1}{2}$, $f_\alpha(x)$為Cantor-Lebesgue函數。圖 4 為該函數的圖形，該函數除去一個測度為零的點集外，函數的導數為零。若$\alpha = \dfrac{1}{3}$, $f_\alpha(x) = x$。圖 5為$\alpha = \dfrac{1}{3}$的函數的圖形，圖 6為$\alpha = \dfrac{5}{6}$的函數的圖形。以上函數的圖形佐證了OKamoto的結論。

2.3 Takagi函數及其推廣

1903年日本數學家Takagi提出了一種簡單的構造處處連續，處處不可導函數的方法。採用該方法構造的函數稱之為Takagi函數[1]。Takagi函數

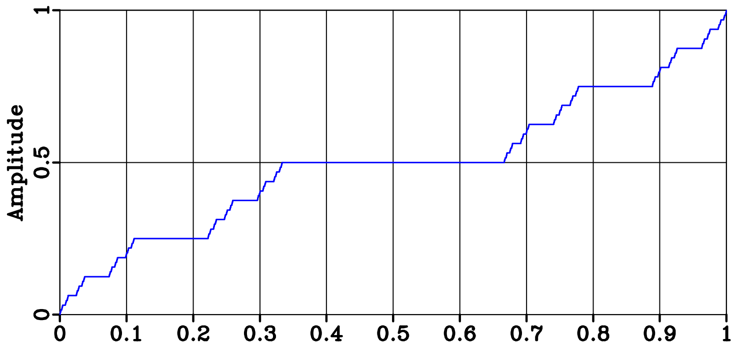

圖 4: Bourbaki函數，$\alpha = \frac{1}{2}$.

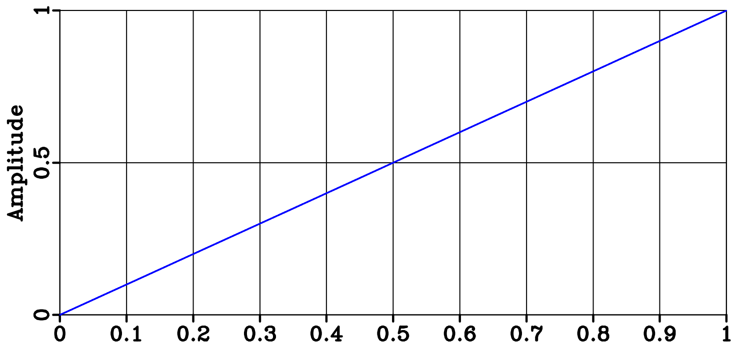

圖 5: Bourbaki函數，$\alpha = \frac{1}{3}$.

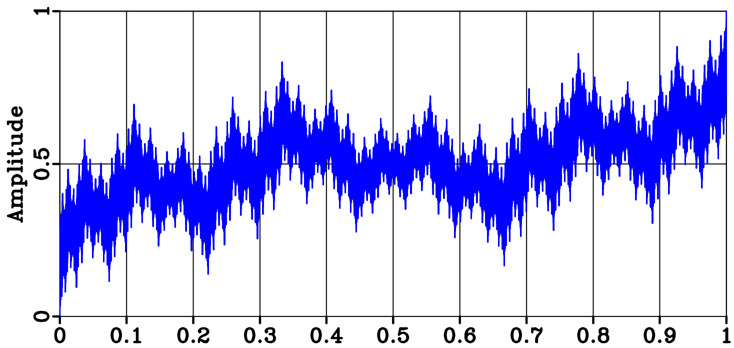

圖 6: Bourbaki函數，$\alpha = \frac{5}{6}$.

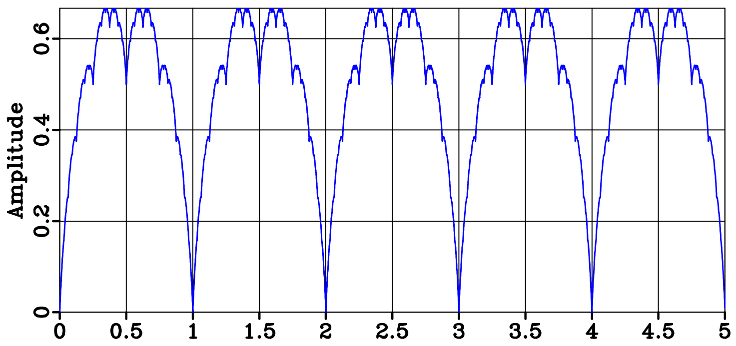

圖 7: Takagi函數，$r = 2$.

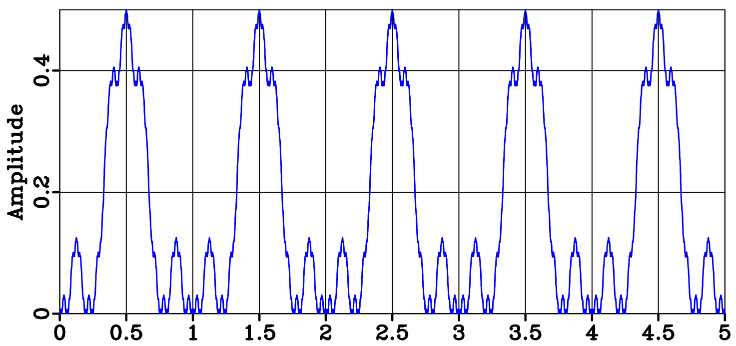

圖 8: Takagi函數，$r = -2$.

為：

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n x) \tag{4}$$

這裡，$\phi(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$表示$x$到最近整數點的距離。 圖 7為公式 4截取前50項得到的Takagi函數在區間 $[0, 5]$上的圖像。Takagi函數的一般形式為：

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^n} \phi(r^n x) \tag{5}$$

圖 8, 9, 10 分別為$r = -2, 3, -3$, 公式 5截取前50項得到的Takagi函數在區間$[0, 5]$上的圖像。 通過這些圖形可以看出：這些圖形類似於分形曲線，具有自相似性。

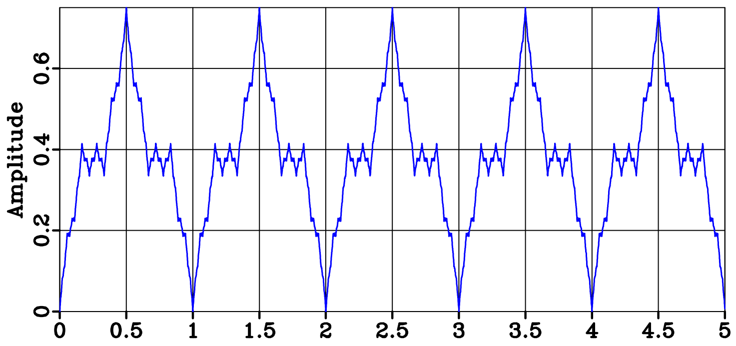

圖 9: Takagi函數，$r = 3$.

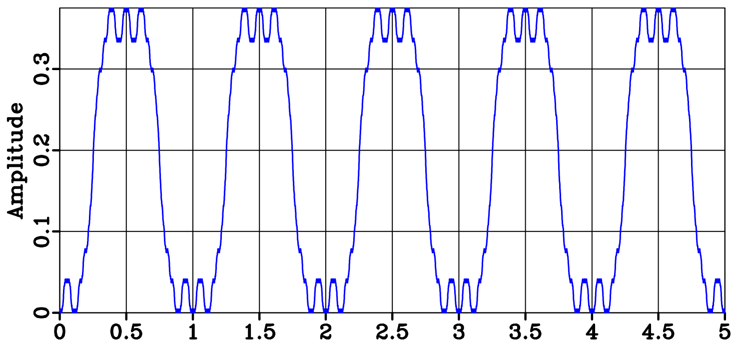

圖 10: Takagi函數，$r = -3$.

3 無理數點連續，有理數點間斷函數的構造與作圖

3.1 Thomae函數討論與作圖

我們熟悉的Dirichlet函數在其定義域上處處間斷， 其定義為[6]:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1875年Thomae基於Dirichlet函數構造了一個在無理數點連續，有理數點間斷的函數， 其定義為[2]：

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p} \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{6}$$

該函數在無理數點不可導，證明如下[2]： 對於$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 對於$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{Z}$滿足$\left|\dfrac{j_n}{n} - a\right| < \dfrac{1}{n}$，從而有：

$$\left|\frac{T\left(\frac{j_n}{n}\right) - T(a)}{\frac{j_n}{n} - a}\right| \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

若上式極限存在，則極限應不小於1。但是若沿著無理數點趨於a點，則極限為0。 綜上所述，函數在無理數點不可導。圖 11為Thomae函數在區間$[-1, 1]$上的圖像。 圖形證實了該函數的週期為1，且有理數集合為實數集的一個稠密子集。

一般的，若存在一個趨於0的數列a_{pq}，定義推廣的Thoame函數為：

$$GT(x) = \begin{cases} r_{pq}, & x = \frac{q}{p} \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{7}$$

該函數的可微性取決於數列的衰減速度[2]。

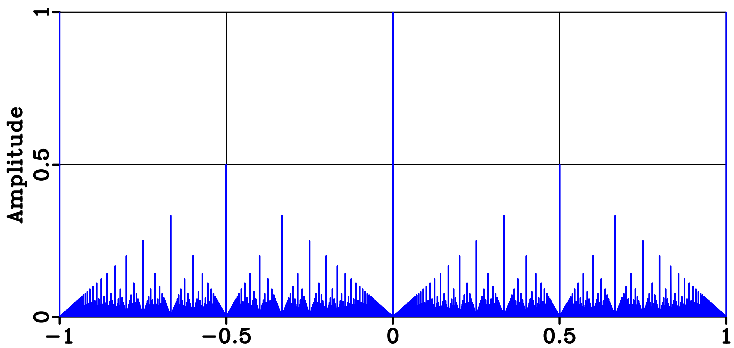

圖 11: Thomae函數.

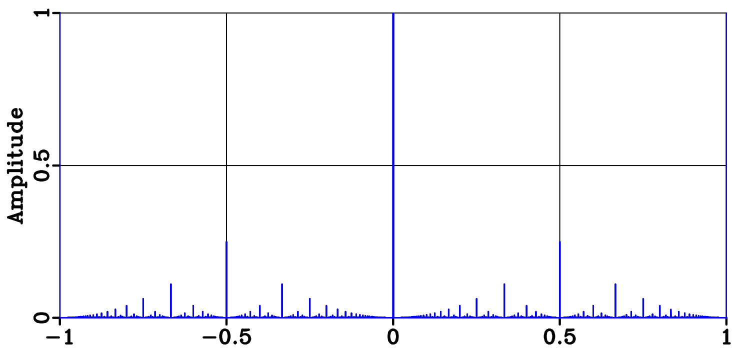

圖 12: 推廣的Thomae函數，式子 8.

下面我們就兩種特殊情況畫出推廣後函數的圖形。

情形1:

$$GT_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{p^2}, & x = \frac{q}{p} \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{8}$$

圖 12為函數 8的圖像。從圖中可以看出， 推廣後的函數保持者與Thomae函數大致相同的形狀，函數的取值比前者 較小。

情形2:

$$GT_1(x) = \begin{cases} r^p, & x = \frac{q}{p} \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{9}$$

這裡$|r| < 1$.

圖 13為函數 9的圖像。從圖中可以看出， 推廣後的函數可能在某些無理數點可導。實際上，以下結論已經被證明[2]。

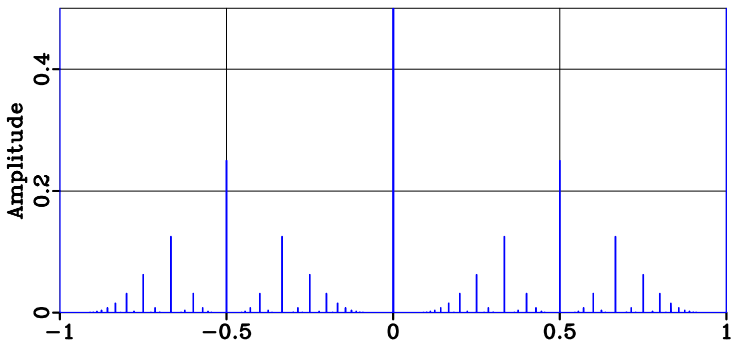

圖 13: 推廣的Thomae函數，式子 9，$r = 2$.

命題 1 對於任意一個趨於零的實數數列$\{r_{pq}\}$，存在一個包含與無理數集的不可數子集， 函數 *8*在該子集上不可導。

4 結語

本文探討了數學分析中一些"奇怪"函數的構造，性質及其作圖。 對這些函數的展示，有助於提高人們的直觀認識。針對這些"奇怪"函數的性質研究， 有助於加深人們對一些概念的理解。

5 附錄：函數作圖C語言編程

5.1 程序1: Weierstrass函數

```
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <weierfun.h>

#ifndef M_PI
#define M_PI acos(-1.0)
#endif

void weierfun(float *data /* weierstrass fun data */,
              int len /* data length */,
```

```
              float a /* parameter of the weierfun*/,
              float b /* parameter of the weierfun*/,
              int maxterms /* maximum number for sum */
              )
{
    int i, j;
    float xmin, dx, *tt, *yy;

    xmin = -2.5; dx = 0.01;

    tt = (float *) malloc(len * sizeof(float));
    for(i=0; i<len; i++){
        tt[i] = xmin + i*dx;
    }

    yy = (float *) malloc(len * sizeof(float));

    for(i=0; i<len; i++){
        yy[i] = 0.0;
        for(j=0; j<maxterms; j++){
            yy[i] += pow(a,j) * cos((pow(b,j) * M_PI * tt[i]));
        }
    }

    for(i=0; i<len; i++){
        data[i] = yy[i];
    }

    free(tt);
    free(yy);
}
```

5.2 程序2:Bourbaki函數

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

void bourbaki(float *data /*the input initial data*/,
              int n /* the nth step */,
              float alpha /* the parameter*/)
{
    int i, j, k, l, len1, len;
    float *pp, *qq;

    if(alpha<=0.0 || alpha >=1.0){
        printf("Error! Alpha must be in (0,1).\n");
        printf("Alpha is %.6f\n", alpha);
        exit(0);
    }

    len1 = 1;
    qq = (float *) malloc(2 * sizeof(float));
    if(qq == NULL){
        printf("Error! Memory not allocated.\n");
        exit(0);
    }
    qq[0] = 0.0; qq[1] = 1.0;

    for(i=0; i<n; i++){
        len1 = len1*3;
        len = len1 + 1;

        pp = (float *)malloc(len * sizeof(float));
        if(pp == NULL){
            printf("Error! Memory is not allocated.\n");
```

```
            exit(0);
        }

        for(j=0; j<len; j++){
            k = j % 3;
            l = j / 3;
            if(k == 0){
                //if((l%2) == 0)
                    pp[j] = qq[l];
                //else
                //      pp[j] = qq[l+1];
            }
            else if(k == 1){
                pp[j] =(1.0 - alpha) * qq[l] + alpha * qq[l+1];
            }
            else if(k == 2){
                pp[j] = alpha * qq[l] + (1.0 - alpha) * qq[l+1];
            }
        }
        pp[len-1] = 1.0;

        free(qq);
        qq = (float *) malloc(len * sizeof(float));
        if(qq == NULL){
            printf("Error! Memory not allocated.\n");
            exit(0);
        }
        for(j=0; j<len; j++){
            qq[j] = pp[j];
        }

        free(pp);
    }
```

```
    for(i=0; i<len; i++){
        data[i] = qq[i];
    }

    free(qq);
}
```

5.3 Takagi函數

```
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <takagi.h>

void takagi(float *data /* weierstrass fun data */,
            int len /* data length */,
            float base /* tha base */,
            int maxterms /* maximum number for sum */
           )
{
    int i, j;
    float *tt, *pp, t0, dt, tp;

    t0 = 0.0; dt = 0.001;
    tt = (float *) malloc(len * sizeof(float));
    pp = (float *) malloc(len * sizeof(float));

    for(i=0; i<len; i++){
        tt[i] = t0 + i * dt;
    }

    for(i=0; i<len; i++){
        pp[i] = 0.0;
```

```
        for(j=0; j<maxterms; j++){
            tp =(float) pow(base,j)*tt[i];
            pp[i] +=(float) pow(1.0/base, j) * fabs(tp - round(tp));
        }
    }

    for(i=0; i<len; i++){
        data[i] = pp[i];
    }

    free(tt);
    free(pp);
}
```

5.4 Thomae函數

```
#include <math.h>
#include <thomae.h>
#ifndef DIST
#define DIST 0.001
#endif

float thomae(float xx, int k){
    return k>250.0 ? 0.0 :(float) (fabs(k*xx - (int)(k*xx)) < \
    DIST ? 1.0/pow(2.0,k) : thomae(xx, k+1));
}
```

参考文獻

[1] P.C. Allaart and K. Kawamura. The takagi function: a survey. *Real Analysis Exchange*, 37(1):1–54, 2011.

[2] K. Beanland, J.W. Roberts, and C. Stevenson. Modifications of thomae's function and differentiability. *The American Mathematical Monthly*, 116(6):531–535, 2009.

[3] N. Bourbaki. *Functions of a real variable: elementary theory. Trans. from the 1976 French original by Philip Spain.* Berlin: Springer, 2004.

[4] G.H. Hardy. Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17:301–325, 1916.

[5] H. Okamoto. A remark on continuous, nowhere differentiable functions. *Proceedings of Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 81(3):47–50, 2005.

[6] V. A. Zorich. *Mathematical Analysis I.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.