# Homework

Guoning Wu

December 30, 2019

# 1 作業

## 1.1 證明題

1. 證明：若分割$\widetilde{P}$ 是分割$P$增加若干分點得到的分割，則有：

$$\sum_{\widetilde{P}} \omega_i' \Delta x_i' \leq \sum_{P} \omega_i \Delta x_i$$

2. 證明：若$f$在$[a,b]$上可積，$[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 則$f$在$[\alpha,\beta]$上也可積。

3. 設$f,g$均為定義在$[a,b]$上的有界函數，僅在有限個點處$f(x) \neq g(x)$, 證明：若$f$在$[a,b]$上可積，則$g$在$[a,b]$上也可積，且有：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

4. 設$f$在$[a,b]$上有界，$\{a_n\} \subset [a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, 證明：若$f$在$[a,b]$上只有$a_n, n = 1,2,\cdots$為其間斷點，則$f$在$[a,b]$ 上可積。

5. 證明：若$f \in C[a,b]$ 且$f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ 則以下結果成立：

   (a) 如果函數$f(x)$存在一點$f(x_0) > 0, x_0 \in [a,b]$，則有：

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

   (b) 若$\int_a^b f(x) = 0$，則有$f(x) \equiv 0$

6. 證明若$f \in C[a,b], f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, 且$M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$,則

$$\lim_{n\to\infty} \left( \int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = M$$

7. 證明黎曼函數

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p,q\text{互質}, q > p, \\ 0, & x = 0,1 \text{ 其它(0,1)内無理數} \end{cases}$$

在區間$[0,1]$上可積。

8. 計算下列定積分

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x(a>0)$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x(a>0)$

(e) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x$

(h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \,\mathrm{d}x$

(i) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$

(j) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(k) $\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x(a>0)$

(l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

9. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$

10. 求下列曲線的弧長

(a) $y=x^{\frac{3}{2}}, 0\le x\le 4$

(b) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(a>0), 0\le t\le 2\pi$

(c) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}(a>0), 0\le\theta\le 3\pi$

11. 求下列平面曲線繞旋轉軸所圍成立體的體積

(a) $y=\sin x, 0\leq x\leq \pi$,繞$x$軸。

(b) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0, 0\leq t\leq 2\pi)$, 繞$x$軸。

(c) $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$，繞極軸。

12. 求下列平面曲線繞指定軸旋轉得到的面積

(a) $y=\sin x, 0\leq x\leq \pi$,繞$x$軸。

(b) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0, 0\leq t\leq 2\pi)$, 繞$x$軸。

(c) $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$，繞極軸。

13. 討論下列積分是否收斂？若收斂，則求其極限。

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x$

14. 討論下列積分的收斂性

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{x^n+1}\,\mathrm{d}x (m, n \geq 0)$

(e) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\,\mathrm{d}x$

15. 討論下列去窮積分為絶對收斂還是條件收斂

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x\,\mathrm{d}x$