测试题一：多元函数微分学

武国宁

1 选择题

(1) 设函数$f(x,y)$可微，且$f(0,0)=0, f(2,1)>3, f'_y(x,y)<0$，则至少存在一点$(x_0,y_0)$使( )

(a) $f_x(x_0,y_0)<1$

(b) $f_x(x_0,y_0)<-3$

(c) $f_x(x_0,y_0)=\frac{3}{2}$

(d) $f_x(x_0,y_0)>\frac{3}{2}$

(2) 已知$f_x(0,0)=2, f_y(0,0)=3$, 则( )

(a) $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续

(b) $\mathrm{d}f(x,y)|_{(0,0)}=2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial l}|_{(0,0)}=2\cos\alpha+3\cos\beta$,其中$\cos\alpha,\cos\beta$为$l$ 的方向余弦

(d) $f(x,y)$其中$\cos\alpha,\cos\beta$在点$(0,0)$处沿x轴负方向的方向导数为-2

(3) 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi'_y(x,y)\neq 0$。已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，下列选项正确的是( )

(a) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$，则$f'_y(x_0,y_0)=0$

(b) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$，则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(c) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0)=0$

(d) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(4) 设可微函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极小值，考虑下列结论(1) $f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数大于零;(2) $f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数等于零; (3) $f(x,y_0)$在$x=x_0$处的导数小于零; (4) $f(x,y_0)$在$x=x_0$处的导数等于零, 其中正确的个数为:( )

(a) 1 个;
(b) 2 个;
(c) 3 个;
(d) 4 个.

(5) 函数$f(x,y)=kx^2+y^3-3y$在点$(0,1)$处( )

(a) 取得极大值;
(b) 取得极小值;
(c) 不取得极值;
(d) 是否取得极值与k取值有关.

(6) 设$u(x,y)$在平面有界区域D上有连续二阶偏导数，在D内$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则函数$u(x,y)$

(a) 最大值点和最小值点必定都在D的内部;
(b) 最大值点和最小值点必定都在D的边界上;
(c) 最大值点在D的内部，最小值点在D的边界上;
(d) 最大值点在D的边界上，最小值点在D的内部.

(7) 已知方程$f(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$确定了函数$z=z(x,y)$，其$f(u,v)$可微，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(\ )$

(a) z;
(b) $-z$;
(c) y;
(d) $-y$.

(8) 设$z=f(xy,x^2+y^2)$，其中$f(u,v)$有二阶连续偏导数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(\ )$

(a) $f_1'+xyf_{11}''+4xyf_{22}''$;
(b) $f_1'+xyf_{11}''+2(x^2+y^2)f_{12}''+4xyf_{22}''$;
(c) $xyf_{11}''+2(x^2+y^2)f_{12}''+4xyf_{22}''$;
(d) $xyf_{11}''+4xyf_{22}''$.

(9) 设有三元方程$xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个领域，在此领域内该方程( )

(a) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z = z(x,y)$;

(b) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y = y(x,z)$和$z = z(x,y)$;

(c) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$z = z(x,y)$;

(d) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x = x(y,z)$和$y = y(x,z)$.

(10) 若$u = u(x,y)$为可微函数，且满足$u(x,y)|_{y=x^2} = 1, \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{y=x^2} = x$,则必有$\dfrac{\partial u}{\partial y}|_{y=x^2}$之值为（）

(a) 1;

(b) $\frac{1}{2}$;

(c) $-\frac{1}{2}$;

(d) -1.

(11) 若设$z = f(x^2+y^2, x^2-y^2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = M$,其中$f$为二次连续可微函数，则（）

(a) $M = 2x(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v})$;

(b) $M = 2x(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2})$;

(c) $M = 2xy(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2})$;

(d) $M = 4xy(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2})$.

(12) 若函数$u = xyf(\dfrac{x+y}{xy}), f(t)$为可微函数，且满足$x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = G(x,y)u$,则$G(x,y)$必等于（）

(a) $x+y$;

(b) $x-y$;

(c) x^2-y^2;

(d) $(x+y)^2$.

(13) 设$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处( )

(a) 不连续;

(b) 连续但两个偏导数不存在;

(c) 两个偏导数存在但不可微;

(d) 可微.

2 填空题

(1) 设函数$u(x)$是由方程组$\begin{cases} u &= f(x,y) \\ F(x,y,z) &= 0 \\ h(x,z) &= 0 \end{cases}$确定的，且$\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0, \dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$，则$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=$________________

(2) 椭球面$2x^2+3y^2+z^2=0$在点$P(1,1,1)$处的切平面方程为________________，法线方程为________________

(3) 曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线方程为________________

(4) 已知函数$z=f(x,y)$连续且满足$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{f(x,y)-x+2y+2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，则$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t,0)-f(1,2t)}{t}=$________________

(5) 函数$u=x^2y^3z^4$在点$A(1,1,1)$处沿从点A到点$B(2,3,4)$的方向的方向导数等于________________