含參變量積分小測試

武國寧

1 含參變量正常積分

(1) 求極限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$

提示：含參變量積分與極限的交換

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$$

(2) 利用交換積分順序的方法計算積分$\int_0^1 \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}(1>a>0)$

提示：

$$\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}=\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+y\sin x}\,\mathrm{d}y$$

(3) 求函數的導數$F(t)=\int_0^{t^2}\,\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y$

提示：令

$$f(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y$$

(4) 利用積分下求導數計算積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x$

提示：令

$$F(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x$$

討論$\frac{\partial F}{\partial a}$，討論$a,b$取值的情況。

2 含參變量反常積分

1. 證明$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} \,\mathrm{d}x$關於$p$在$(-1,1)$上內閉一致收斂。
   提示：
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} \,\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{\cos x^2}{x^p} \,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} \,\mathrm{d}x$$

2. 利用$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} \,\mathrm{d}y$, 計算積分$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \,\mathrm{d}x(b > a > 0)$
   提示：證明含參變量積分$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \,\mathrm{d}x$關於$y \in (a,b)$一致收斂，交換積分的次序。

3 Euler積分

1. 計算積分$\int_0^1 \sqrt{x - x^2} \,\mathrm{d}x$
   提示，採用$B(p,q)$ 求解。

2. 證明$\int_0^{\infty} e^{-x^n} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ 並證明$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} \,\mathrm{d}x = 1$
   提示，利用$\Gamma(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})$